

UNIVERSIDAD DE SANTANDER

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS

DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DEPARTAMENTO DE ANALISIS DE LAS ESTRUCTURAS

CATEDRA DE CALCULO DE ESTRUCTURAS

**CALCULO CONVENCIONAL
DE ESTRUCTURAS
PROBLEMAS**

**AVELINO SAMARTIN GUIROGA
JOSE R. GONZALEZ DE CANGAS
LUIS MORENO GARCIA
JAVIER TORRES RUIZ**

PUBLICACION : AE - 80.6

1980

PROPOSITO

En estas notas se han recopilado un conjunto de problemas de cálculo clásico de estructuras, con un objetivo muy claro: Ayudar al alumno que se inicia en el Cálculo de Estructuras a conocer y comprender el fenómeno estruktural, mediante técnicas sencillas, que no exigen recursos informáticos importantes. De esta forma estará en condiciones no solo de asimilar posteriormente las posibilidades del cálculo matricial de estructuras, sino también, de comprobar a veces los resultados -que muchos creen mágicos e infalibles- del computador. El origen de estos problemas que se presentan es muy vario, algunos se remontan a mis años lejanos de estudiante, otros al libro clásico - de Teoría de las Estructuras de Timoshenko y también existen aquellos que son cosecha de los autores y que se han propuesto en los distintos exámenes de la Escuela.

Con esta publicación, que se desea ya desde ahora ampliar, corregir y mejorar, se inicia la tarea propuesta por el Departamento de Análisis de las Estructuras, de suministrar al alumno de la Escuela un tipo de informa--ción, que muchas veces se encuentra dispersa o es de difícil acceso. Se espera, que este esfuerzo de colaboración - de todos los que trabajamos en la Cátedra de Estructuras - se vea recompensado por su utilidad.

Con estas palabras se iniciaba la publicación de la primera edición de estos problemas. Nada nuevo puede ahora añadirse, simplemente que de acuerdo con el espíritu de entonces, se han introducido algunos problemas nuevos, otros se han vuelto a redactar en un esfuerzo de alcanzar una mayor claridad en la exposición. En todo caso, se ha intentado subsanar algunas erratas y defectos de la anterior edición.

Los problemas se han clasificado de acuerdo con el índice que se presenta a continuación. No existen en todos los apartados ejemplos de problemas y en otros, por su interés, se presentan varios ejercicios.

Avelino Samartín

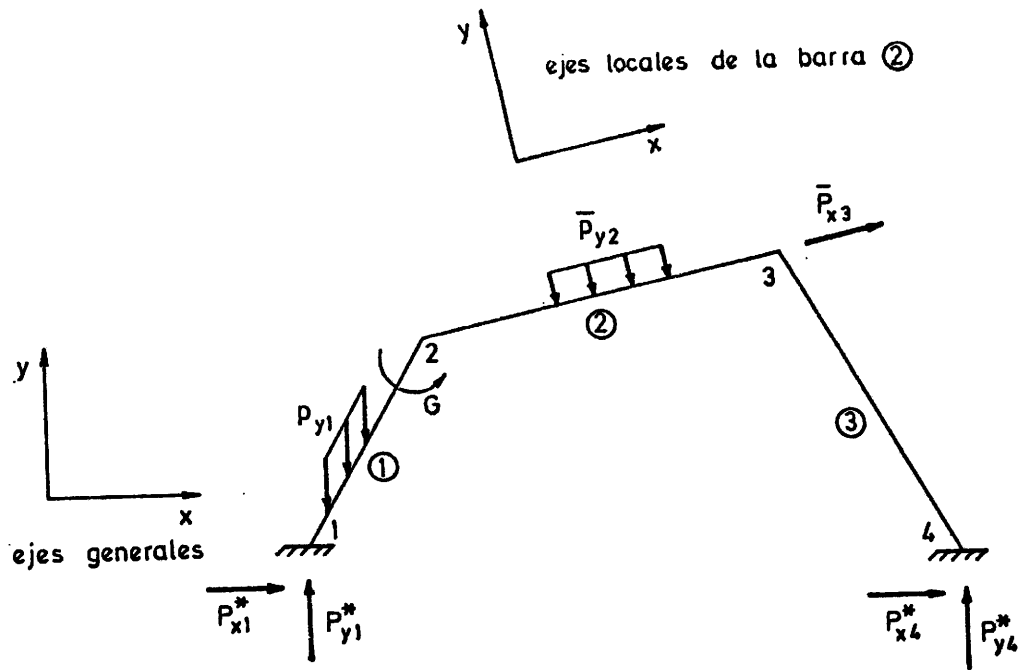
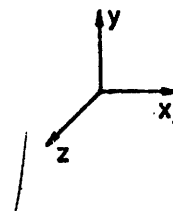
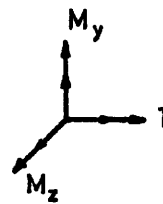
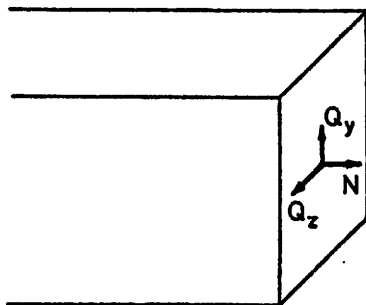


Fig. 0a

ESFUERZOS EN UNA SECCION: (ver figura 0b)

Axial	N
Momento flector	$M(M_y, M_z)$
Cortante	$Q(Q_y, Q_z)$
Torsor	T



x tangente a la directriz
y, z ejes principales de la sección

Fig. 0b

Las reacciones en extremos de barra se connotarán por:

$$\underline{S} \quad S_x \quad S_y \quad S_z \quad S_x \quad S_y \quad S_z$$

TENSIONES EN UNA FIBRA. (SECCION): (ver figura 0c)

Longitudinales	$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z$
$\underline{\sigma}$	
Transversales	$\tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}$

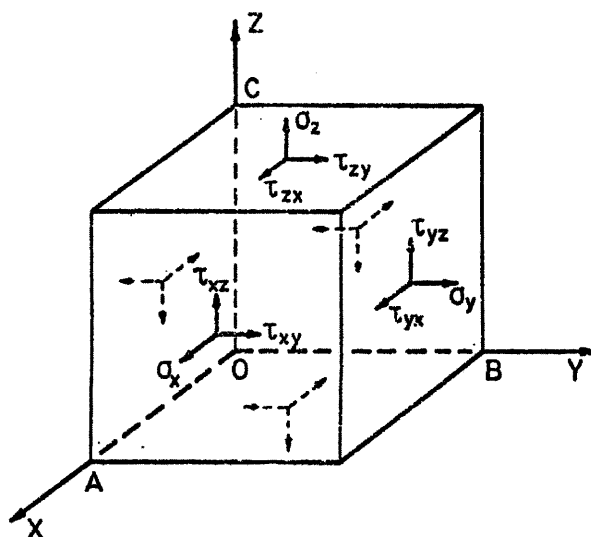


Fig. 0c

MOVIMIENTOS RELATIVOS: (ver figura 0d)

Dislocación de una sección:

$$\Delta u, \Delta v (\Delta v_1, \Delta v_2)$$

$$\Delta \psi (\Delta \psi_1, \Delta \psi_2), \Delta \omega$$

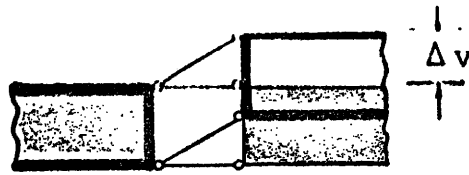


Fig. 0d

MOVIMIENTO RELATIVO DE NUDOS ENTRE EXTREMOS DE BARRA:

(ver figura 0e)

$$\underline{e} \Delta(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z) \quad \phi(\phi_x, \phi_y, \phi_z)$$

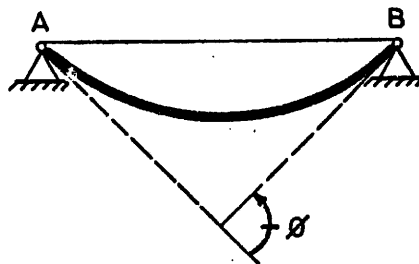
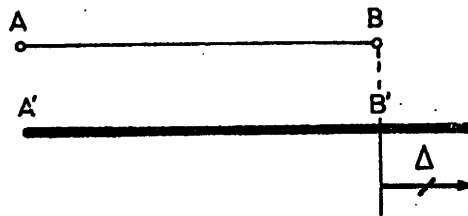


Fig. 0e

DEFORMACIONES EN UNA FIBRA. (SECCION): (ver figura 0f)

Longitudinal $\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z$

$\underline{\epsilon}$
Transversal. $\gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}$

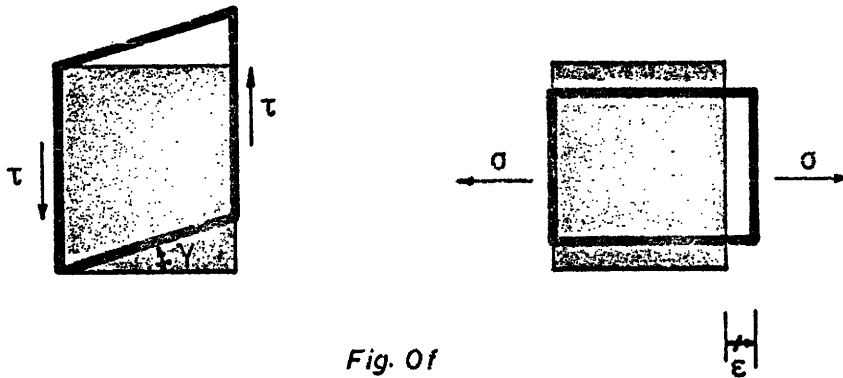


Fig. 0f

MOVIMIENTOS ABSOLUTOS: (ver figura 0g)

de nudo:

\underline{d} d_x d_y d_z θ_x θ_y θ_z ejes generales

\bar{d} \bar{d}_x \bar{d}_y \bar{d}_z θ_x θ_y θ_z ejes locales

de sección:

$u, v(v_1, v_2)$

$\psi(\psi_1, \psi_2), \omega$

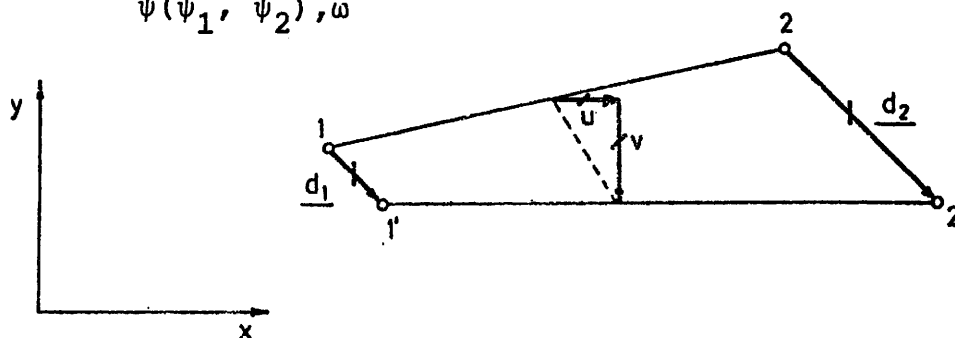


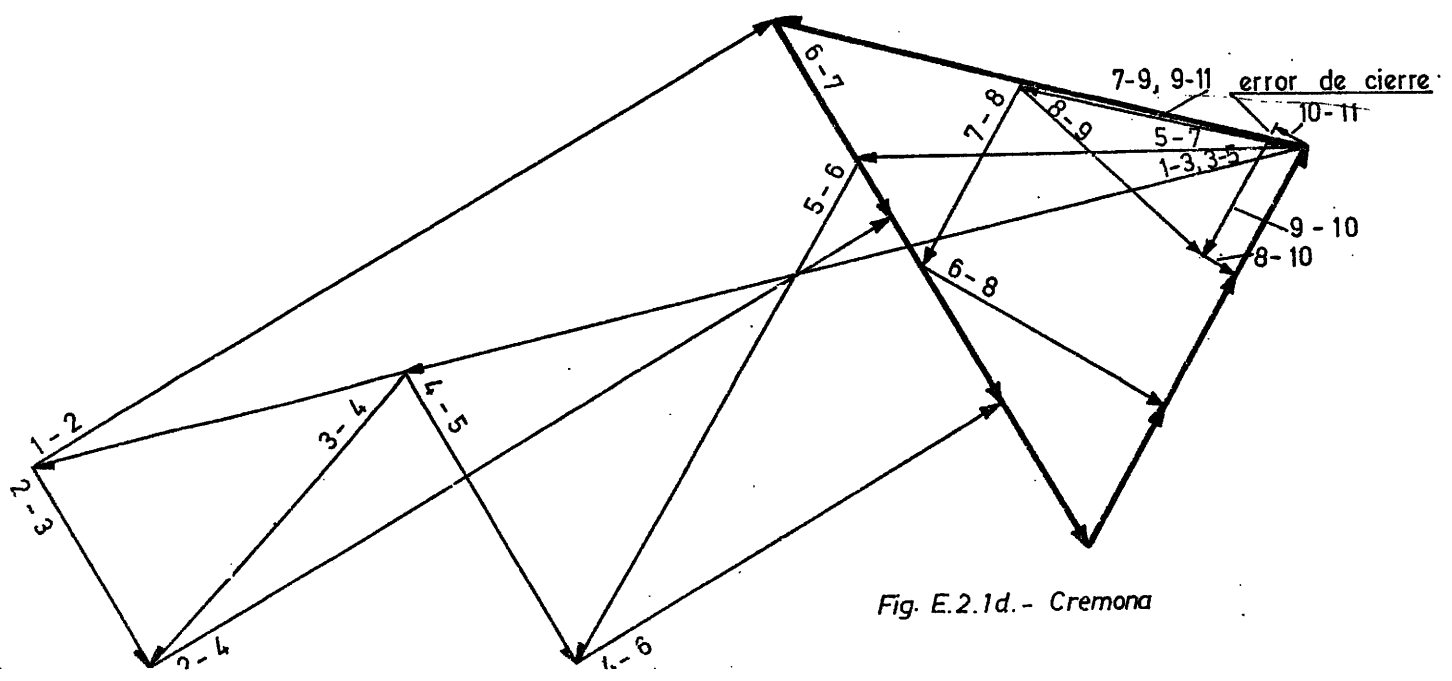
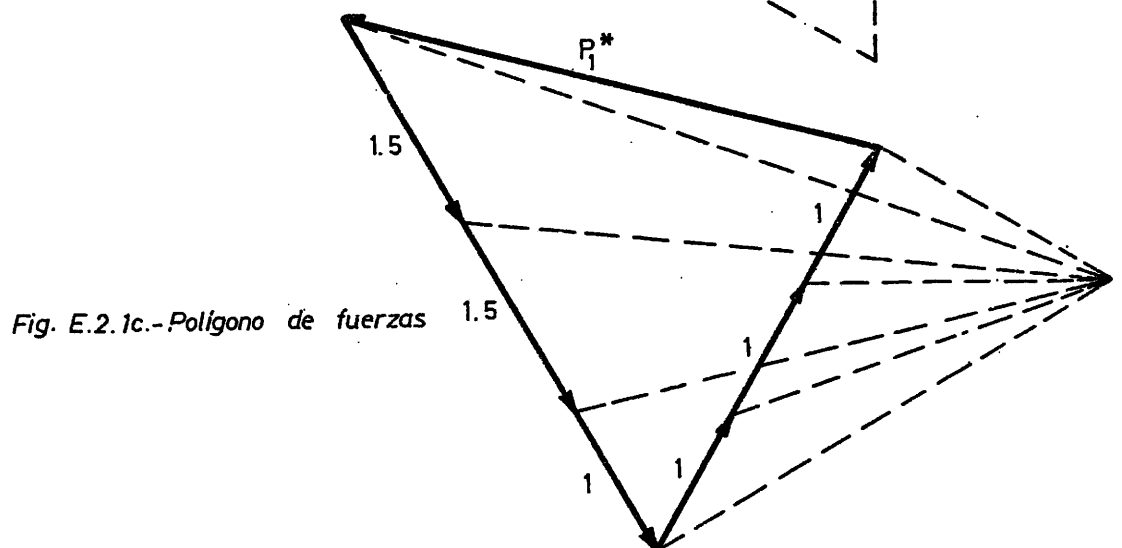
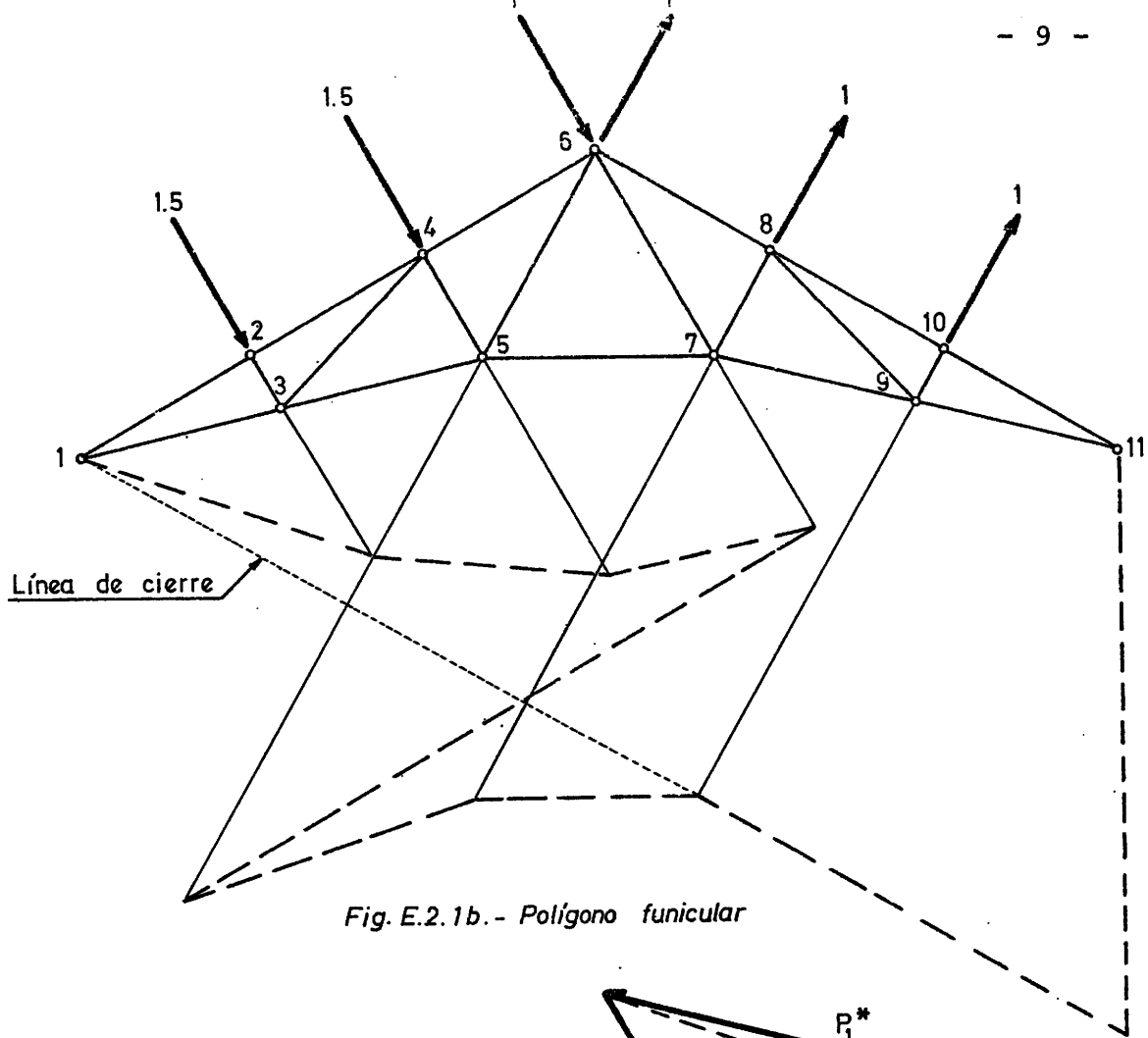
Fig. 0g

La reacción P_{11}^* es nula como se ve al resolver gráficamente. Evidentemente las tensiones en 9-11 y 10-11 deberían de ser cero, pero por error de dibujo da un valor pequeño. El error de cierre que se muestra en la figura E2.1d indica la magnitud de la falta de aproximación. El polígono de fuerzas y la figura de Cremona se suelen superponer en la práctica.

El resultado se indica en la tabla E2.1 y en la figura E2.1e.

Tabla E2.1

Barra	Tracción	Compresión
1-2		-5,8
1-3	8,7	
2-3		-1,5
2-4		-5,8
3-4	2,7	
3-5	6,05	
4-5	2,25	-2,2
4-6		-3,15
5-6	3,75	
5-7	2,95	
6-7		-0,85
6-8		-1,80
7-8	1,40	
7-9	1,40	
8-9		-1,20
8-10		-0,25
9-10	0,90	
9-11	0,26	
10-11		-0,25



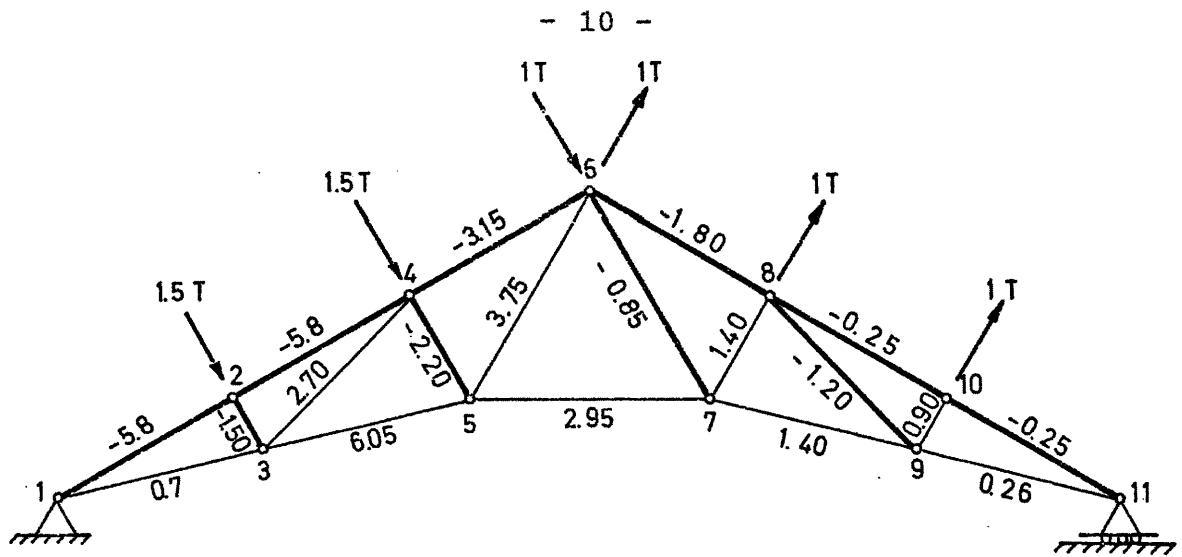


Fig. E2.1e .- Esfuerzos resultantes

Ejercicio E2.2

Obtener los esfuerzos en todas las barras de la estructura de la figura E2.2a, utilizando las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes.

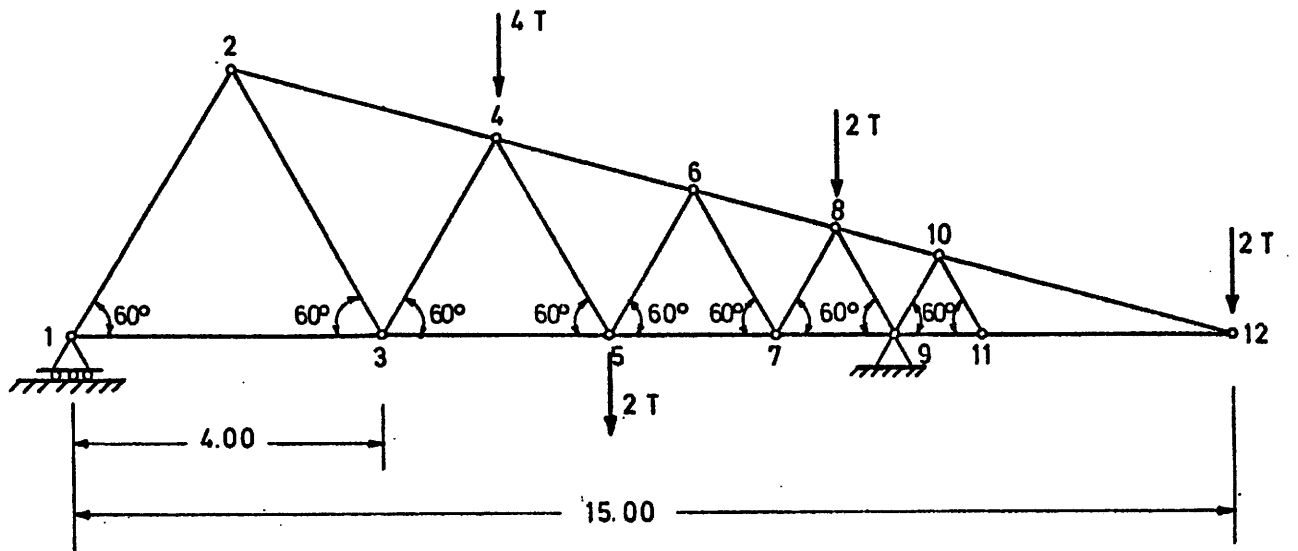


Fig. E.2. 2a

Las reacciones en los apoyos son verticales y valen:

$$P_1^* = \frac{4 \cdot 5,195 + 2 \cdot 3,728 + 2 \cdot 0,788 - 2 \cdot 4,339}{10,661} = 1,982 \text{ T.}$$

$$P_9^* = \frac{4 \cdot 5,466 + 2 \cdot 6,933 + 2 \cdot 9,873 + 2 \cdot 15,000}{10,661} = 8,018 \text{ T.}$$

La ley de momentos flectores para la sección x de la celosía es teniendo en cuenta la figura E2.2c:

$$M_x = \sum_f P_i (x_i - x) = \sum_f x_i P_i - x \sum_f P_i$$

en donde \sum_f representa el sumatorio respecto a las secciones frontales (a la derecha) de la sección x.

La ley de cortantes en la sección x es simplemente:

$$Q_x = \sum_f P_i$$

Por lo tanto se puede escribir la siguiente tabla E2.2a que muestra las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes que se visualizan en las figuras E2.2d y E2.2e.

Tabla E2.2a Flectores y Cortantes

		(1)		(2)	(3)	(3)-(2) (1)
Nudo	P_i	x_i	$x_i P_i$	$Q_x = \sum_f P_i$	$\sum_f x_i P_i$	M_x
1	1,982	0,00	0,00	0,00	0,000	0,00
2	0,000	2,000	0,00	-1,982	0,000	3,964
3	0,000	4,000	0,00	-1,982	0,000	7,982
4	-4,000	5,466	-21,864	-1,982	0,000	10,835
5	-2,000	6,933	-13,866	2,018	21,868	7,875
6	0,000	8,009	0,000	4,018	35,734	3,554
7	0,000	9,084	0,000	4,018	35,734	-0,768
8	-2,000	9,873	-19,746	4,018	35,734	-3,936
9	8,018	10,661	85,480	6,018	55,480	-8,678
10	0,000	11,240	0,000	-2,000	-30,000	-7,521
11	0,000	11,818	0,000	-2,000	-30,000	-6,364
12	-2,000	15,000	-30,000	-2,000	-30,000	0,00

En la práctica, las distancias x_i se miden directamente sobre el dibujo teniendo en cuenta la escala utilizada en el mismo.

Los esfuerzos en las barras se calculan según las fórmulas siguientes, teniendo en cuenta la figura E2.2b:

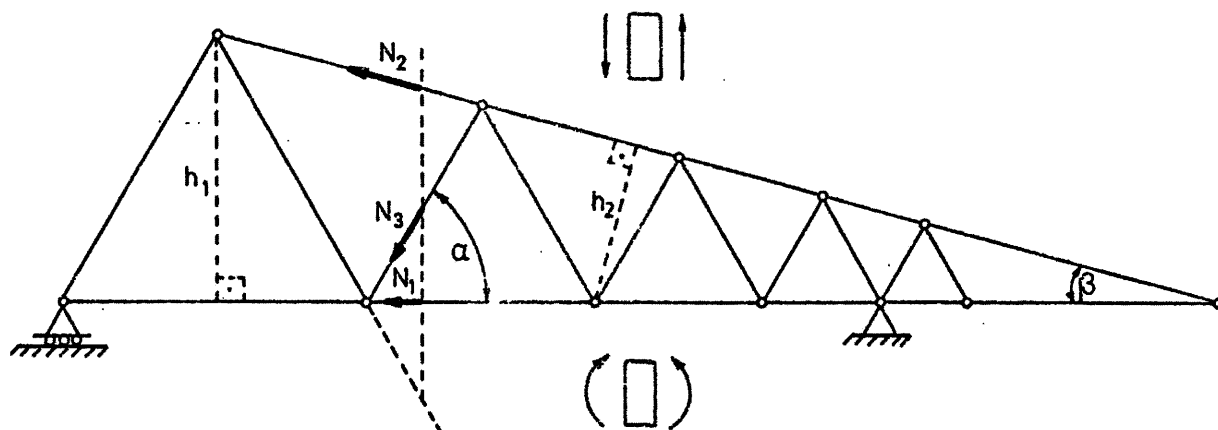


Fig. E22 b.- Criterio de signos.

$$\text{Cordones: } N_1 = \frac{M_x}{h_1} ; N_2 = \frac{M_x}{h_2}$$

Barras inclinadas:

$$Q = N_3 \operatorname{sen} \alpha - N_2 \operatorname{sen} \beta; \quad N_3 = \frac{Q + N_2 \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Utilizando los valores de la tabla E2.2a (figuras E2.2d y E2.2c) y sabiendo que:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{4 \frac{3}{2}}{\sqrt{\left(\frac{4 \frac{3}{2}}{2}\right)^2 + 13^2}} = 0,257$$

se tienen los resultados siguientes:

Tabla E2.2b Esfuerzos en cordones

Unidades	mxT	m	m	T
Barra	M_x	h_1	h_2	N
1-3	3,964	3,464		1,15
3-5	10,835	2,540		4,27
5-7	3,554	1,863		1,91
7-9	-3,936	1,366		-2,88
9-11	-7,521	1,002		-7,51
11-12	-7,521	1,002		-7,51
2-4	7,928		-2,832	-2,80
4-6	7,875		-2,077	-3,79
6-8	-0,768		-1,523	0,50
8-10	-8,678		-1,117	7,77
10-12	-6,364		-0,819	7,77

Tabla E2.2c Esfuerzos en barras inclinadas

Unidades	T	T			T
Barra	Q	N_2	$\text{sen}\beta$	$\text{sen}\alpha$	N_3
1-2	-1,982	0,00	0,257	3/2	-2,29
2-3	-1,982	-2,80	0,257	- 3/2	3,12
3-4	-1,982	-2,80	0,257	3/2	-3,12
4-5	2,018	-3,79	0,257	- 3/2	-1,21
5-6	4,018	-3,79	0,257	3/2	3,51
6-7	4,018	0,50	0,257	- 3/2	-4,79
7-8	4,018	0,50	0,257	3/2	4,79
8-9	6,018	7,77	0,257	- 3/2	-9,25
9-10	-2,000	7,77	0,257	3/2	0,00
10-11	-2,000	7,77	0,257	- 3/2	0,00

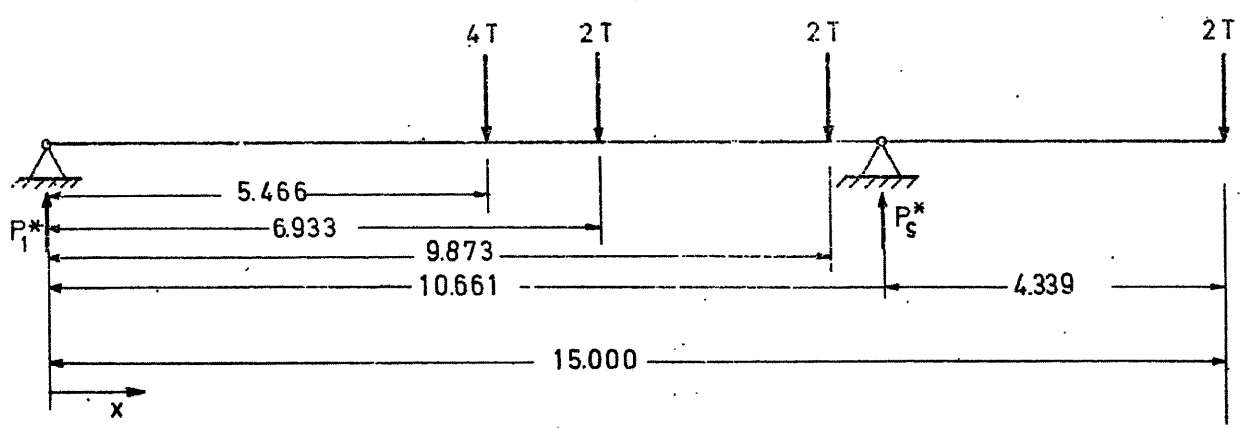


Fig. E 2.2 c.- Obtención de los momentos flectores

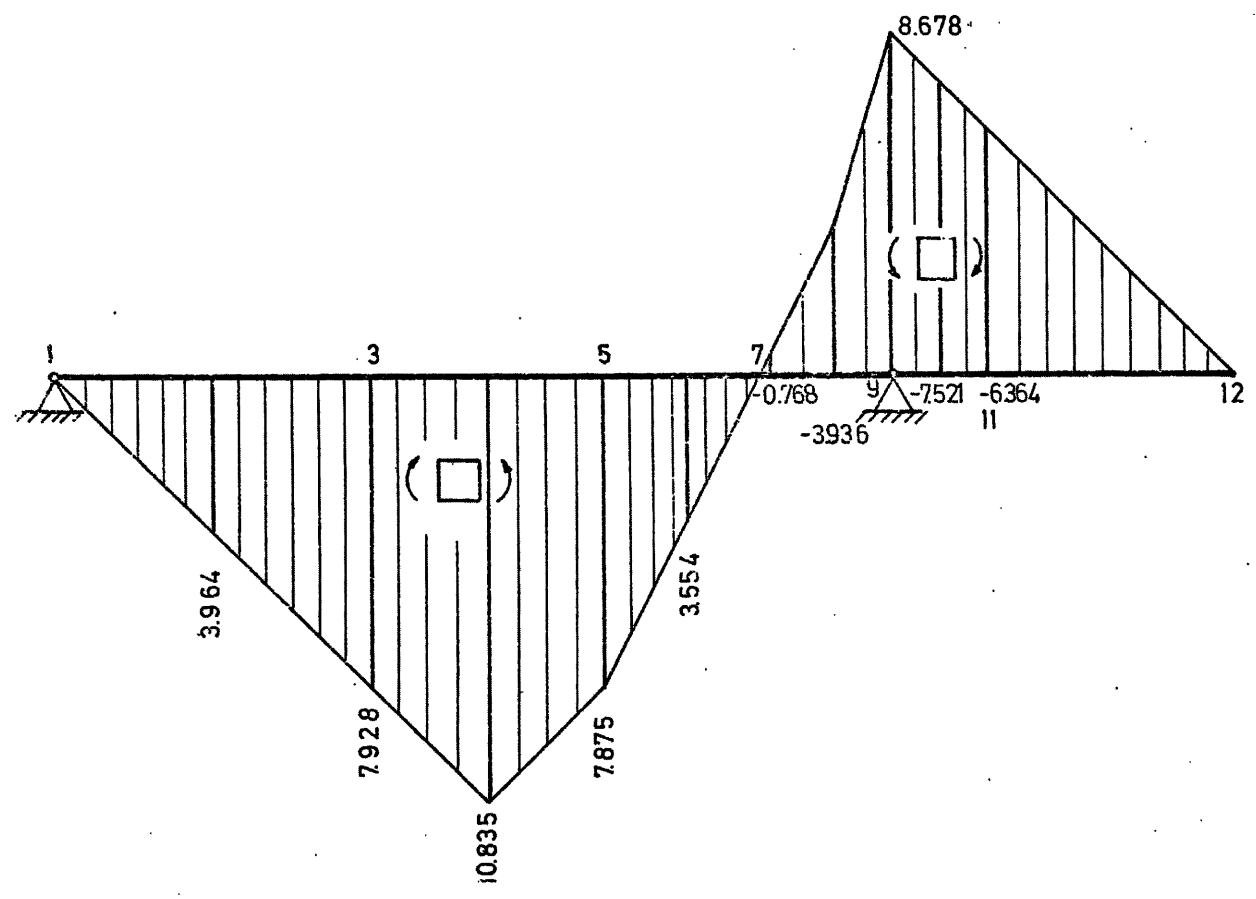


Fig. E. 2.2 d.- Ley de momentos flectores (M)

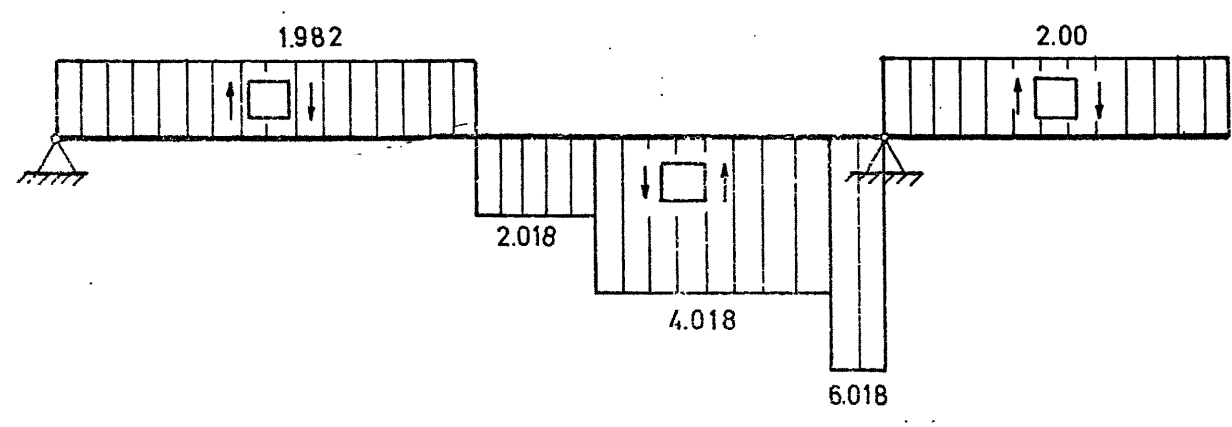


Fig. E. 2.2 e.- Ley de esfuerzos cortantes (Q)

En la figura E2.2f se indican todos los esfuerzos finales en las barras.

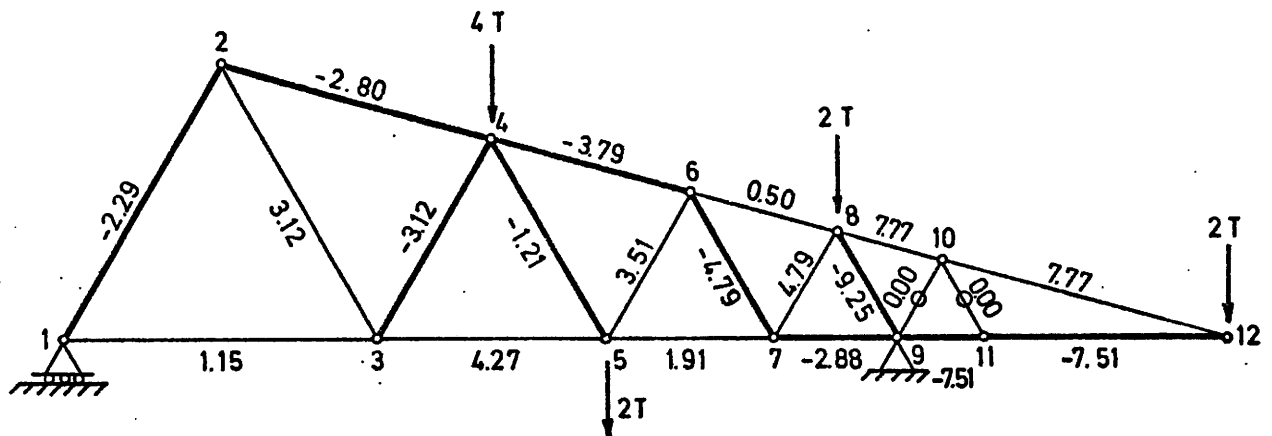


Fig. E. 2.2 f. - Esfuerzos resultantes

Ejercicio E2.3

Calcular los esfuerzos en todas las barras de la estructura de la figura E2.3a a partir de las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes.

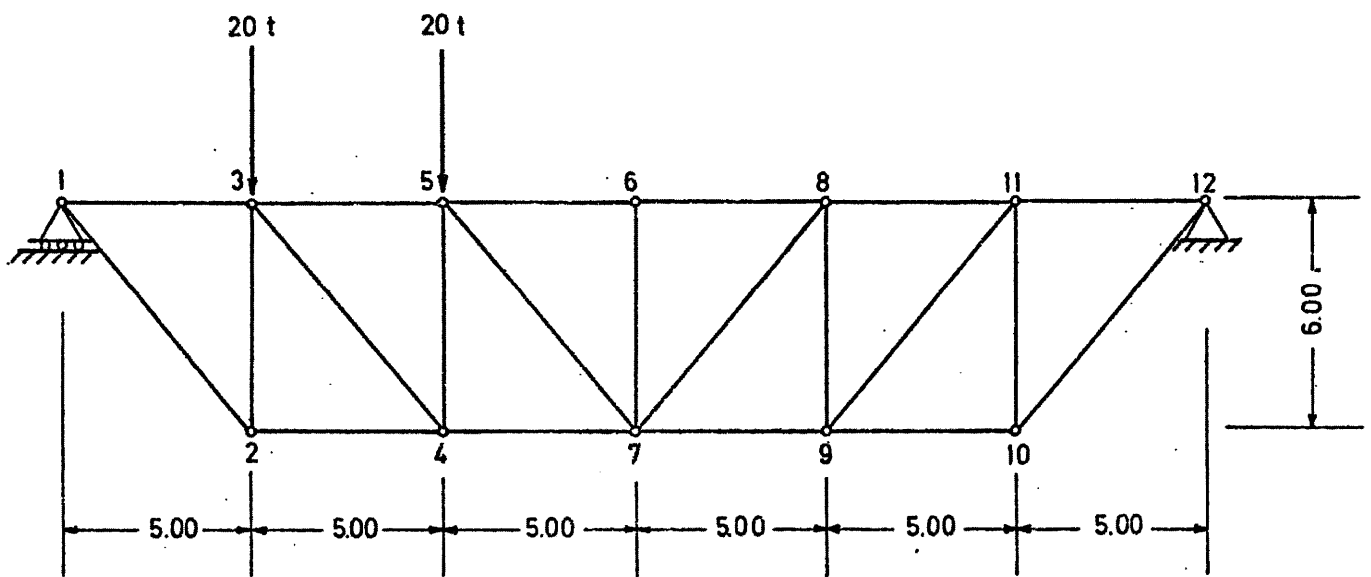


Fig. E.2. 3a

Con el mismo razonamiento hecho en el ejercicio E2.2 se tiene:

Tabla E2.3a Flectores y cortantes

		(1)		(2)	(3)	(3) - (2) (1)
Nudo	P_i	x_i	$x_i P_i$	$Q_x = \sum_f P_i$	$\sum_f x_i P_i$	M_x
1	30,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2 y 3	-20,00	5,00	-100,00	-30,00	0,00	150,00
4 y 5	-20,00	10,00	-200,00	-10,00	100,00	200,00
6 y 7	0,00	15,00	0,00	10,00	300,00	150,00
8 y 9	0,00	20,00	0,00	10,00	300,00	100,00
10 y 11	0,00	25,00	0,00	10,00	300,00	50,00
12	10,00	30,00	300,00	10,00	300,00	0,00

Las leyes de esfuerzos obtenidas en la tabla anterior se hallan representadas en las figuras E2.3c y E2.3d.

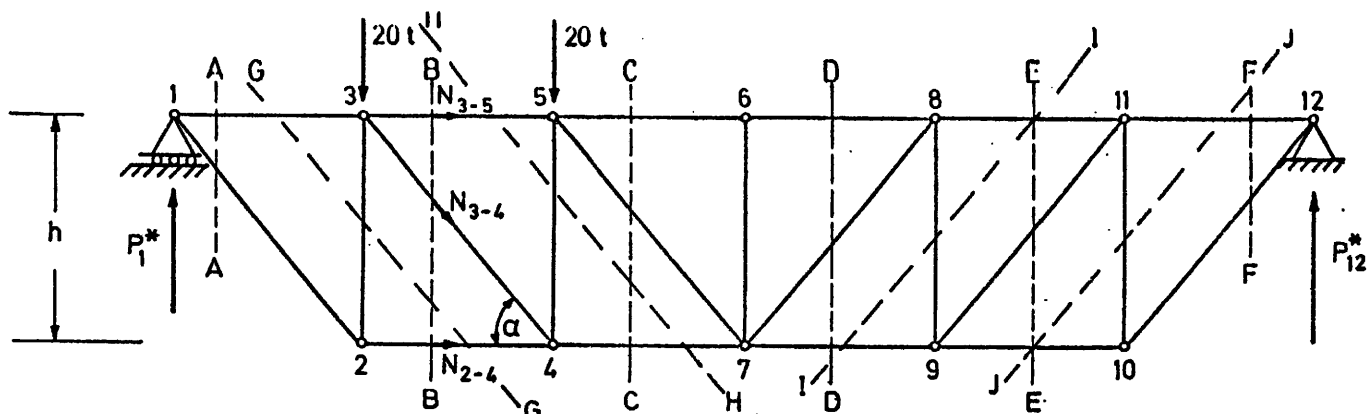


Fig. E.2.3b. - Cortes

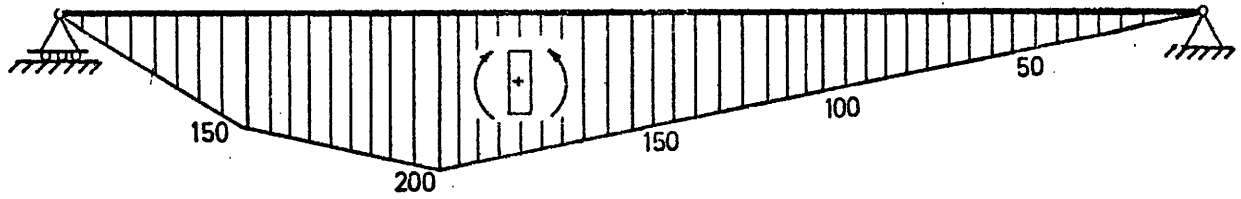


Fig. E.2.3c.- Ley de momentos flectores

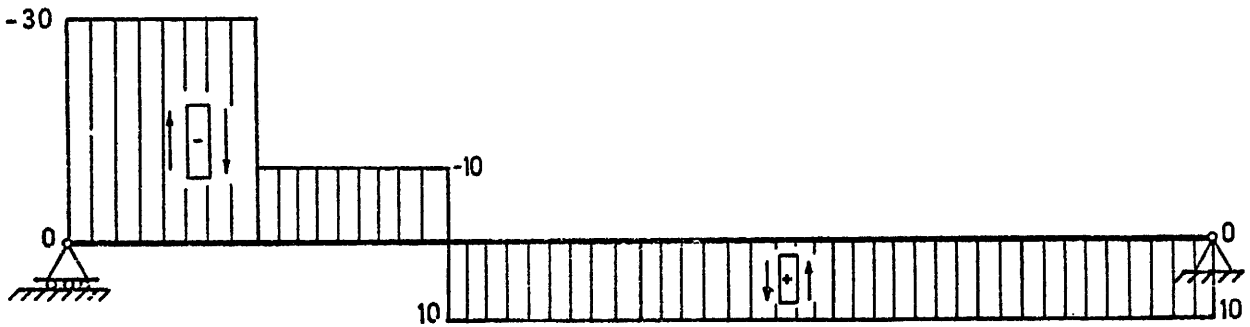


Fig. E.2.3d.- Ley de esfuerzos cortantes

Los esfuerzos axiales se deducen a partir de los resultados de la tabla citada, realizando los cortes indicados en la figura E2.3b (cortes verticales para obtener esfuerzos en los cordones y cortes oblicuos para obtener esfuerzos en las barras inclinadas).

Por simples consideraciones de equilibrio, se cumplen las ecuaciones siguientes:

Cordones:
$$N = \frac{N_x}{h}$$

Barras inclinadas:
$$Q = N \operatorname{sen} \alpha ; \quad N = \frac{Q}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Barras verticales:
$$N = Q$$

Los esfuerzos axiales en cada barra son, por tanto:

Tabla E2.3b Esfuerzos en cordones

Unidades	mxT	m	T
Barra	M_x	h	N
1-3	150,00	-6,00	-25,00
2-4	150,00	-6,00	25,00
3-5	200,00	-6,00	-33,33
4-7	200,00	-6,00	33,33
5-6	150,00	-6,00	-25,00
6-8	150,00	-6,00	-25,00
7-9	100,00	-6,00	16,67
8-11	100,00	-6,00	-16,67
9-10	50,00	-6,00	8,33
11-12	50,00	-6,00	-8,33

Tabla E2.3c Esfuerzos en barras inclinadas

Unidades	T		T
Barra	Q	sen α	N
1-2	-30,00	-0,768	39,06
3-4	-10,00	-0,768	13,02
5-7	10,00	-0,768	-13,02
7-8	10,00	0,768	13,02
9-11	10,00	0,768	13,02
10-12	10,00	0,768	13,02

Tabla E2.3d Esfuerzos en barras

Unidades	T	T
Barra	Q	N
2-3	-30,00	-30,00
4-5	-10,00	-10,00
6-7		0,00
8-9	10,00	10,00
10-11	10,00	10,00

Dichos resultados se indican, de un modo resumido en la tabla E2.3e y están representados en la figura E2.3e.

Tabla E2.3e Resultados finales

BARRA		
1-2	39	
1-3		-25
2-3		-30
2-4	25	
3-4	13	
3-5		-33,33
4-5		-10
4-7	33,33	
5-6		-25
5-7		-13
6-7		
6-8		-25
7-8	13	
7-9	16,67	
8-9		-10
8-11		-16,67
9-10	8,33	
9-11	13	
10-11		-10
10-12	13	
11-12		- 8,33

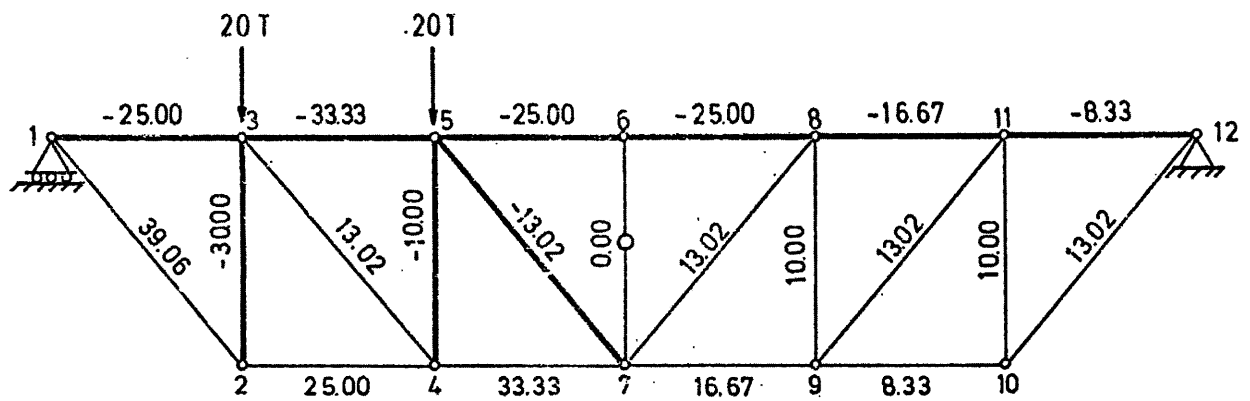


Fig. E.2.3.e.- Esfuerzos resultantes

Efectuando el corte A-A indicado en la figura E2.4b y obligando a que el momento de las fuerzas exteriores sea igual al momento producido por los esfuerzos, respecto al nudo 5, se deduce:

$$+ 2 \cdot 1,20 + 1 \cdot 2,80 + 1 \cdot 4,00 = N_{1-6} \cdot 4,50; N_{1-6} = 2,04 \text{ T}$$

En las figuras E2.4c y E2.4d se representan las construcciones de Cremona de las dos subestructuras sombreadas en la figura E2.4a.

En la tabla E2.4a se pueden ver los resultados.

Tabla E2.4a

Barra	Esfuerzo
1-6	+2,04
1-2	-5,30
1-3	+4,35
2-3	+2,00
2-5	-5,30
3-4	+4,00
3-5	+2,00
6-7	-2,25
6-8	+0,50
7-8	+1,00
7-9	-2,00
8-9	-0,70
8-10	+0,55
5-9	-3,00
9-10	+1,50
5-10	- 0,60

(+) = tracción

(-) = compresión

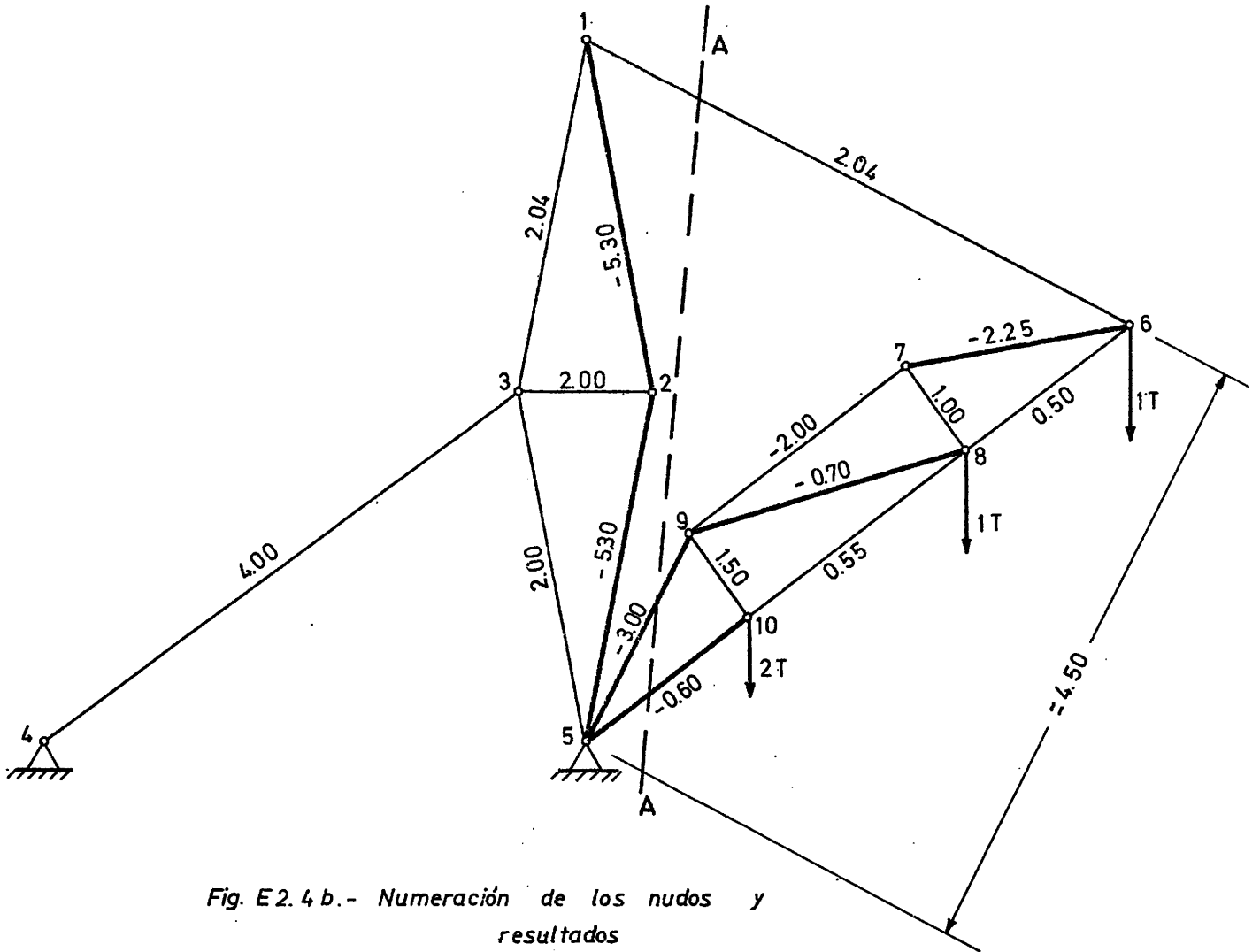


Fig. E2.4 b.- Numeración de los nudos y resultados

1T \equiv 1 cm.

Sentido de giro

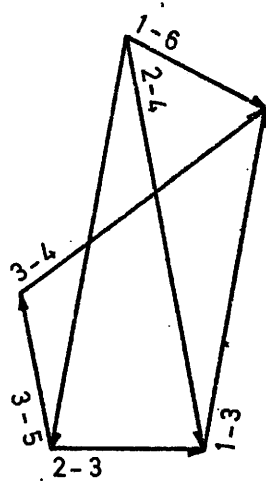


Fig. E2.4 c

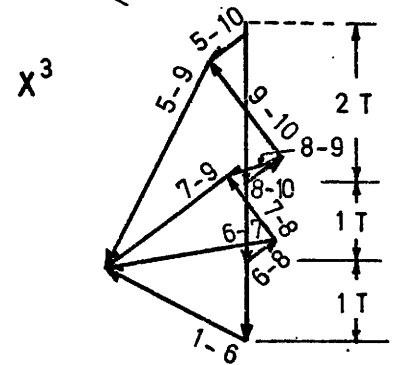


Fig. E2.4 d

Ejercicio E2.5

Determinar gráficamente los esfuerzos en todas las barras de la figura E2.5a.

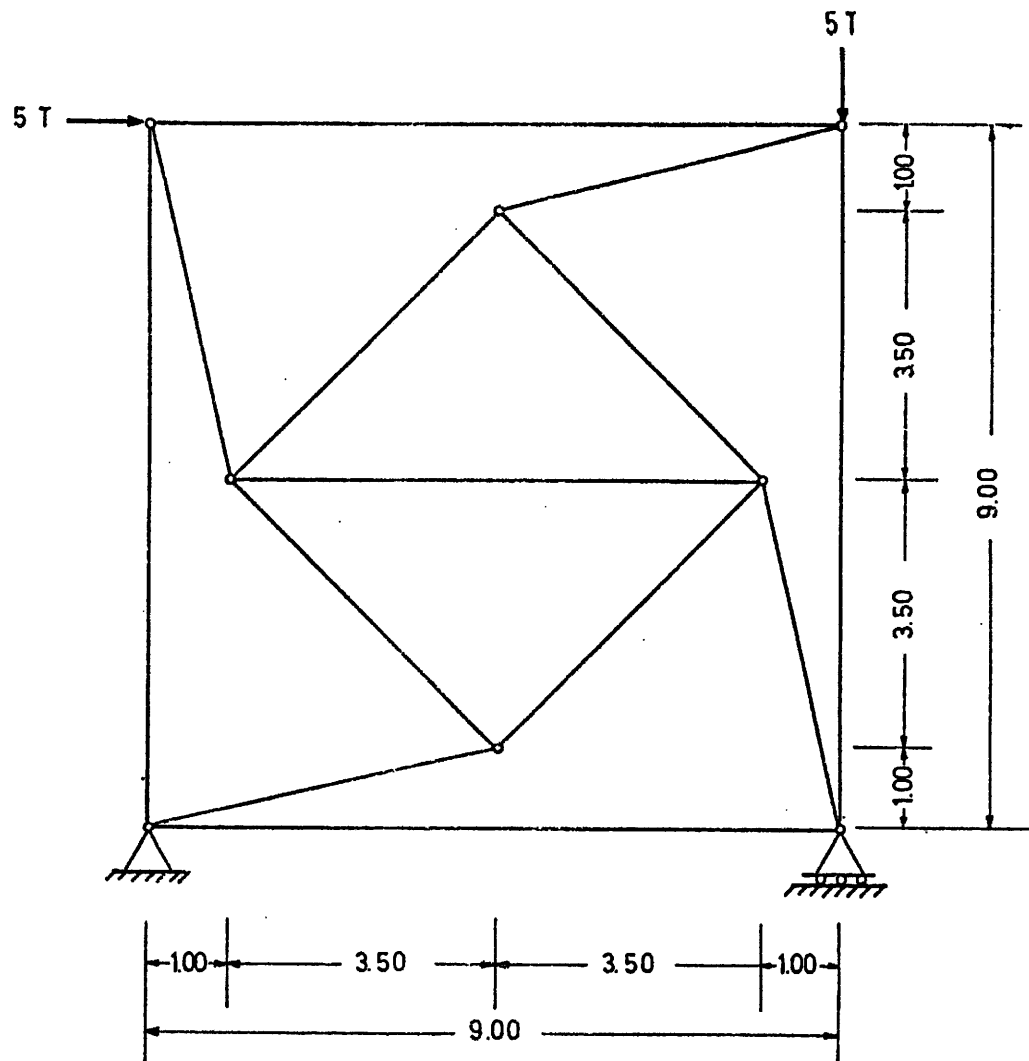


Fig. E 2.5 a

Para resolver este ejercicio se suprime la barra 1-5 y se añade la barra ficticia 4-5 se ve en la figura - E2.5b.

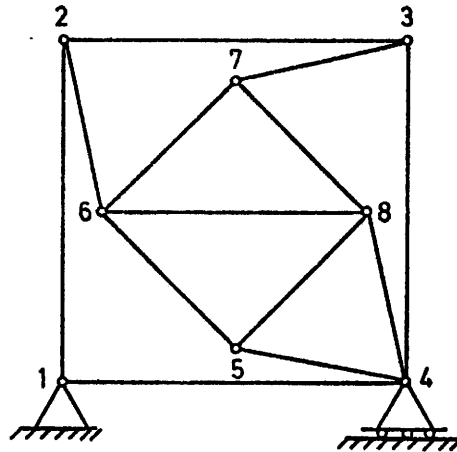


Fig. E2.5b.- Estructura auxiliar

Esta nueva estructura se resuelve a través de - los 2 estados que se indican en las figuras E2.5c.

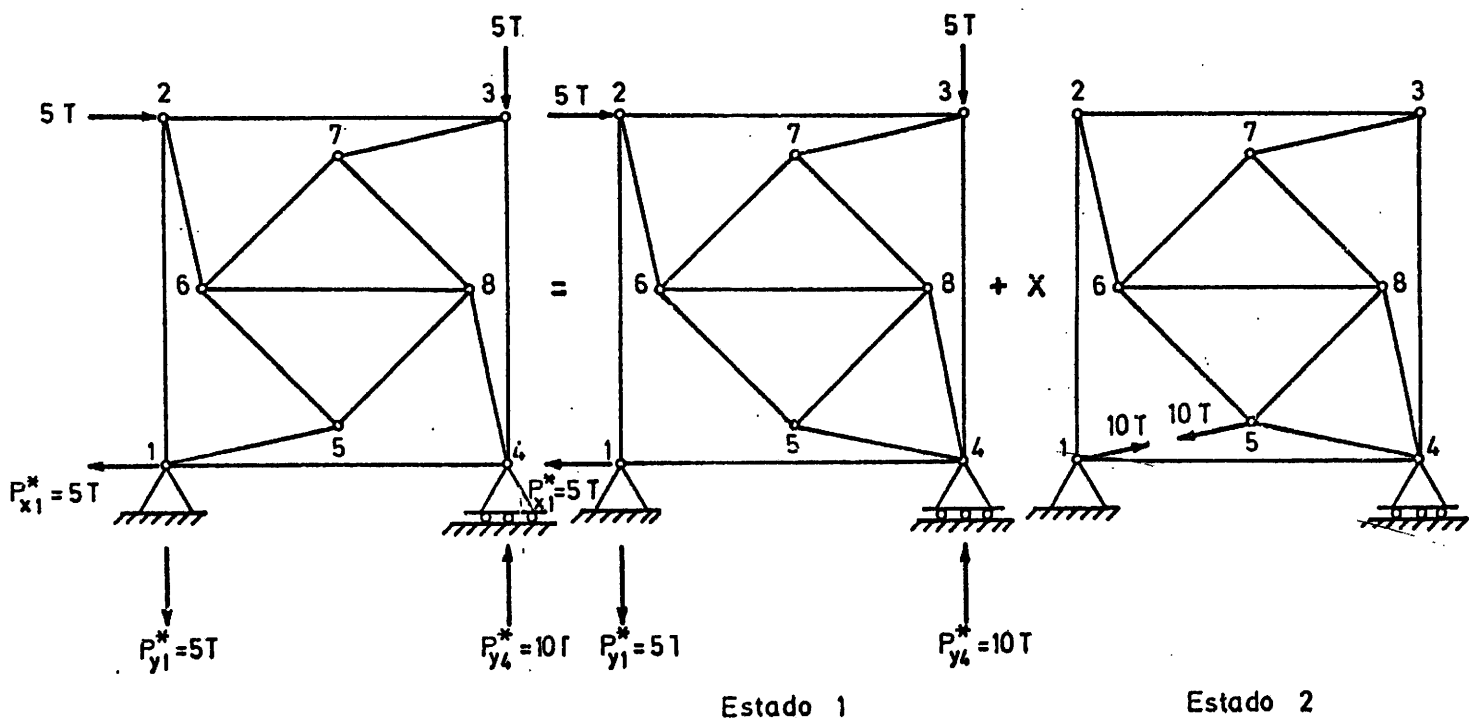


Fig. E2.5c.- Descomposición en dos estados

La resolución de los Cremonas de los dos estados anteriores se representa en las figuras E2.5d y E2.5e.

El resultado se expresa en la tabla E2.5a.

Tabla E2.5a

Barra	Estado 1	Estado 2	Estado final
1-2	5,00	-2,20	4,07
1-4	5,00	-9,75	0,85
1-5	0,00	10,00	4,25
2-3	-4,00	-0,50	-4,21
2-6	-5,10	2,25	-4,14
3-4	-5,60	-0,10	-5,64
3-7	4,10	0,50	4,31
4-5	-4,45	10,50	0,00
4-8	-3,35	-2,20	-4,29
5-6	-3,80	3,50	-2,30
5-8	2,50	2,80	3,70
6-7	3,40	0,40	3,57
6-8	-0,80	-2,30	-1,78
7-8	-2,30	-0,25	-2,40

Se ha señalado la tracción con el signo + y la compresión con el signo -.

El estado final se ha obtenido haciendo nula la tensión en la barra ficticia 4-5:

$$-4,45 + 10,50 x = 0$$

$$x = \frac{4,45}{10,50} = 0,425$$

Entonces las tensiones en las barras serán:

$$N^F = N^I + 0,425 N^{II} \text{ siendo}$$

$$N^F = \text{tensión en el estado final}$$

$$N^I = \text{tensión en el estado 1,}$$

$$N^{II} = \text{tensión en el estado 2}$$

Las tensiones finales se expresan en la tabla E2.5a y en la figura E2.5f.

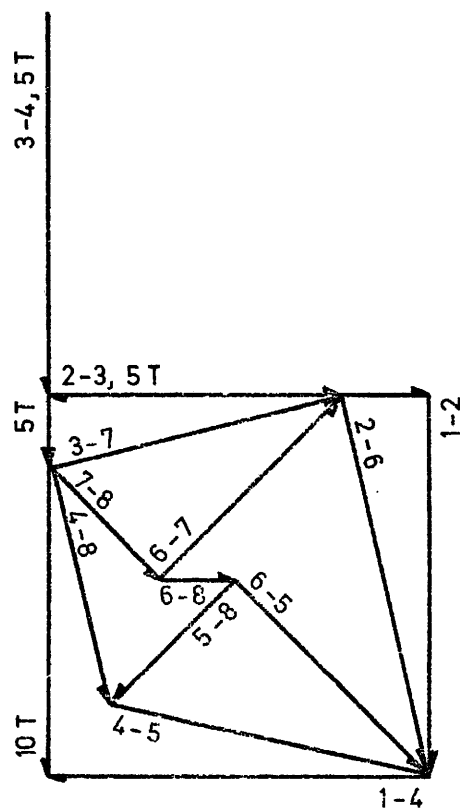
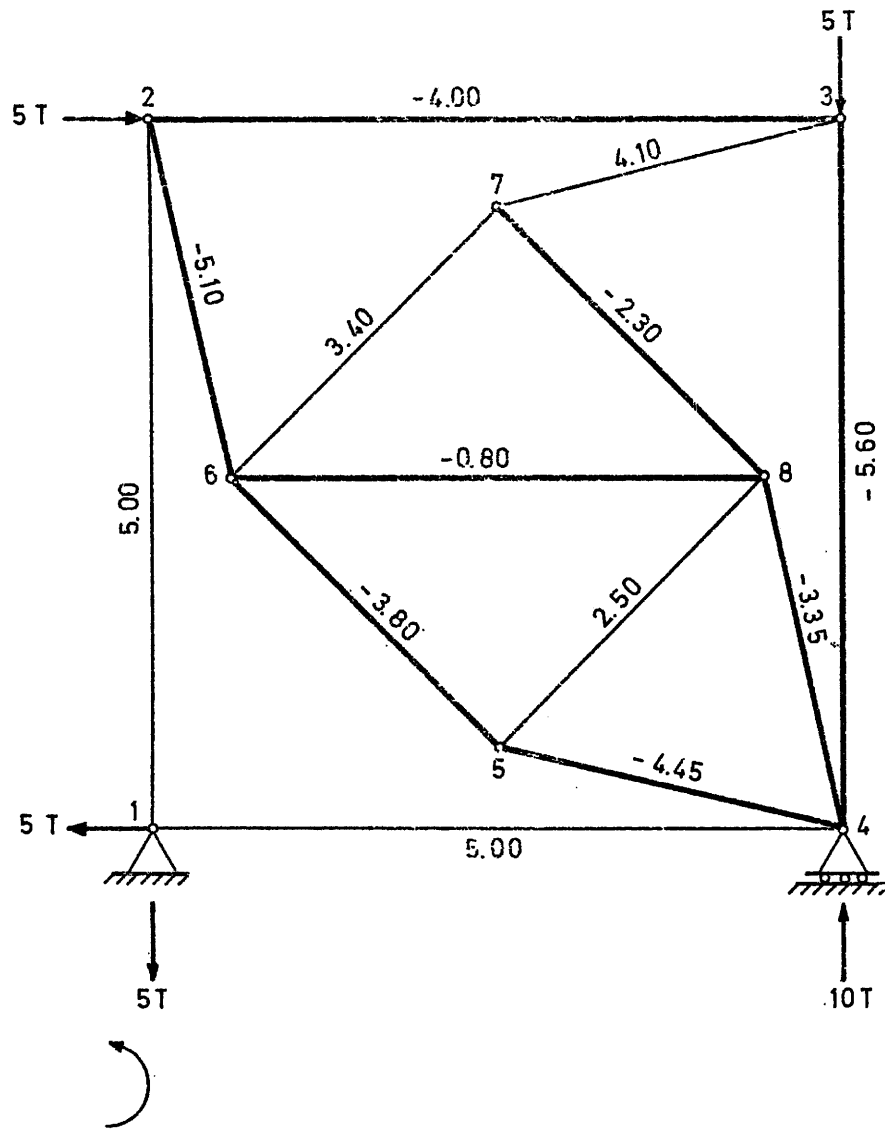


Fig. E2.5 d. - Cremona del estado (1)

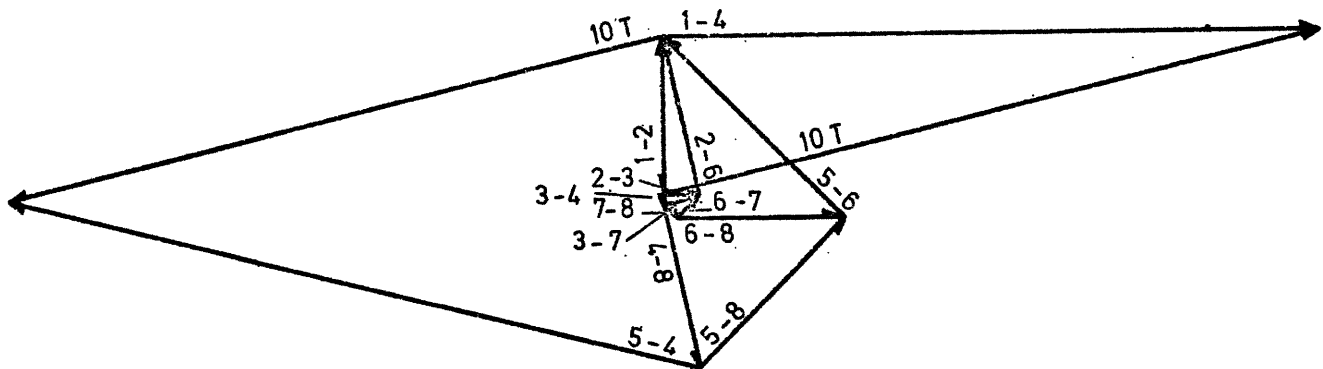
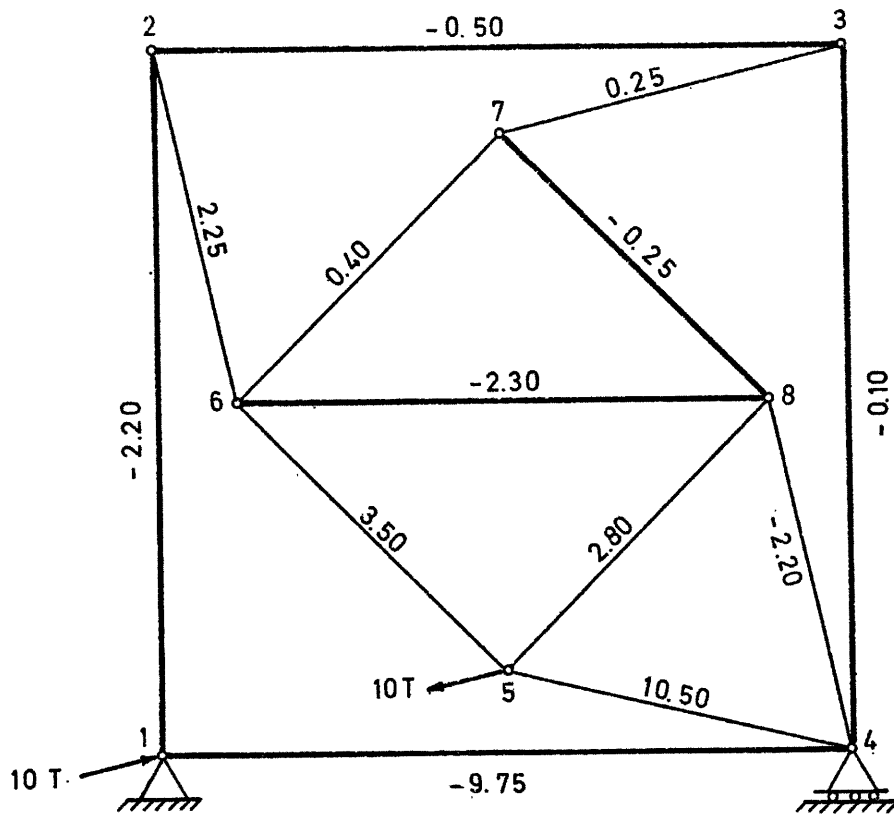


Fig. E2.5 e - Cremona del estado (2)

Ejercicio E2.6

Calcular la estructura de la figura E2.6a mediante la técnica de estructuras compuestas.

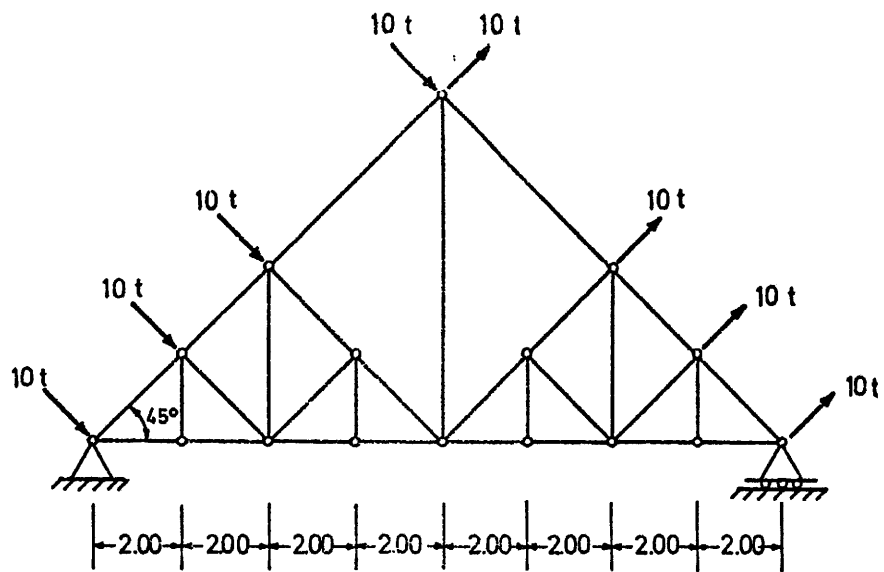


Fig. E 2.6 a

La estructura de la figura E2.6b se puede descomponer en las subestructuras que se indican en las figuras E2.6c, E2.6d, E2.6e, E2.6f, E2.6g, E2.6h y E2.6i.

La resolución de los Cremonas se hace en las figuras E2.6j, E2.6k y E2.6l.

Las subestructuras 4, 5, 6 y 7 son inmediatas de resolver.

Los esfuerzos aparecen en la tabla E2.6a.

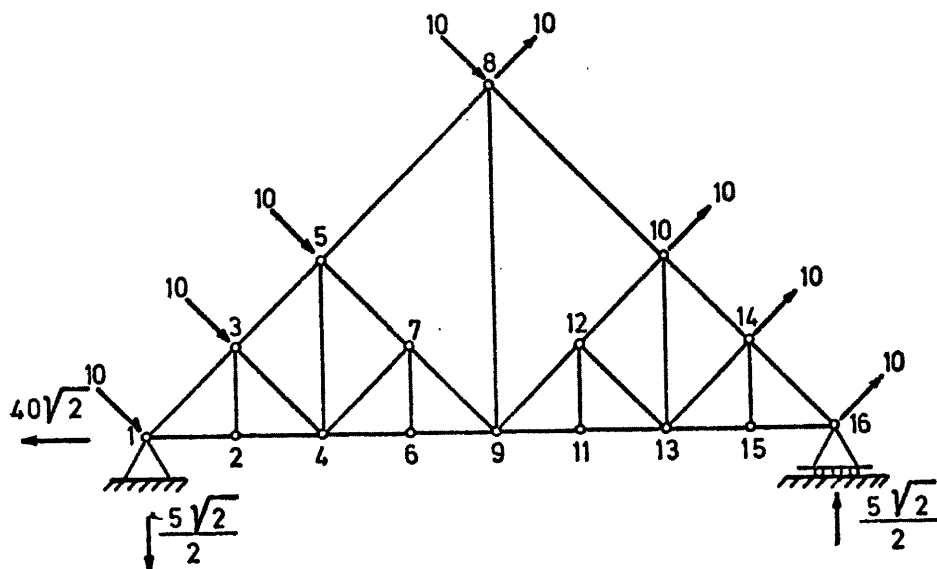


Fig. E2.6 b

Subestructura 4 Subestructura 5 Subestructura 6 Subestructura 7

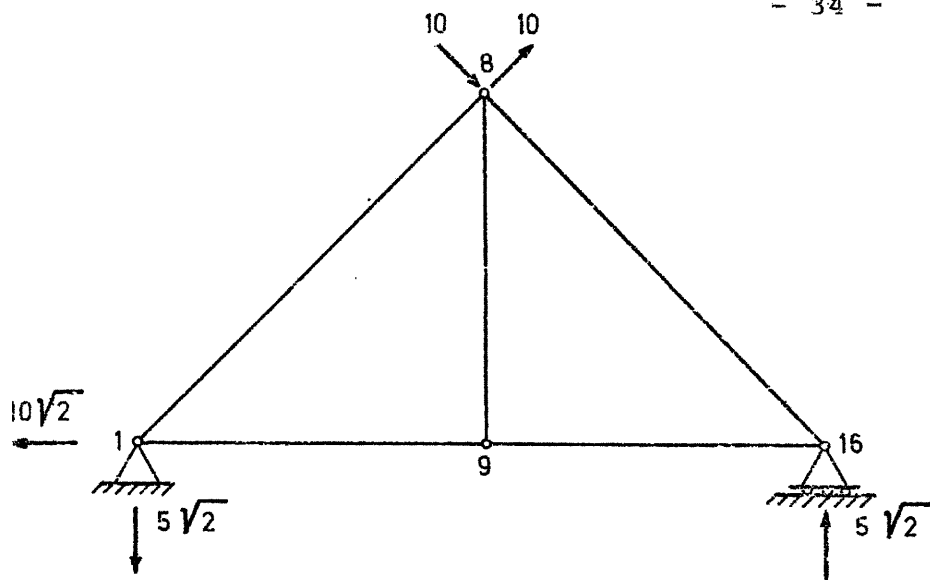


Fig. E2.6c.- Subestructura 1

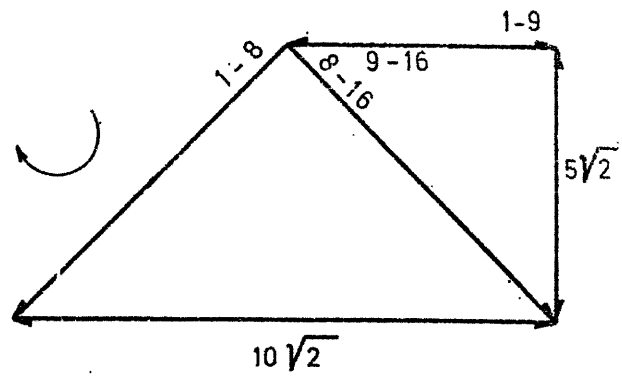


Fig. E2.6j.- Cremona de la Subestructura 1

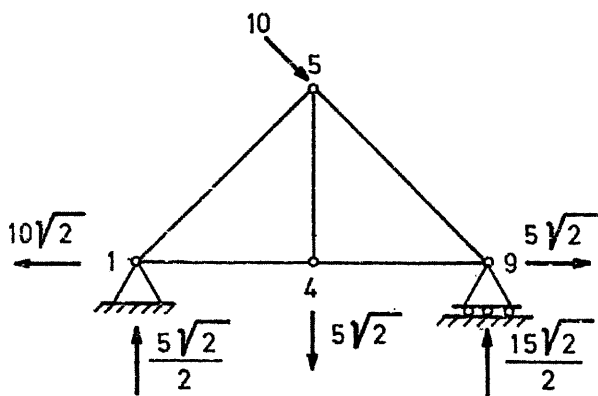


Fig. E2.6d.- Subestructura 2

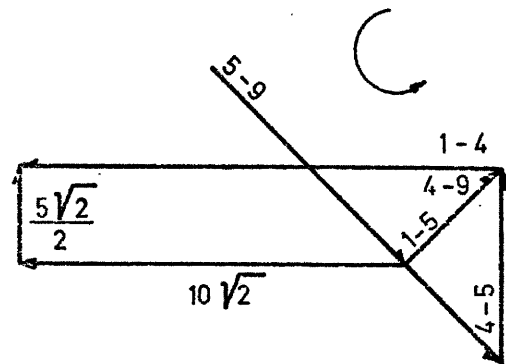


Fig. E2.6k.- Cremona de la Subestructura 2

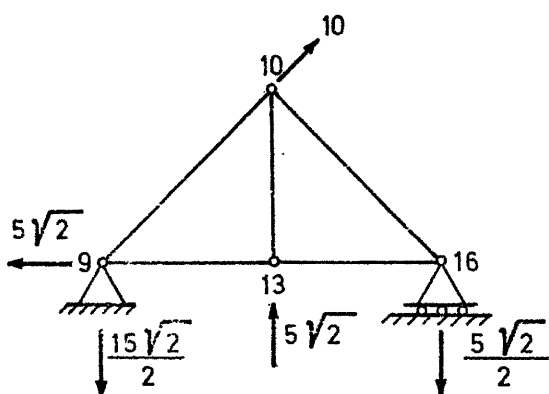


Fig. E2.6e.- Subestructura 3

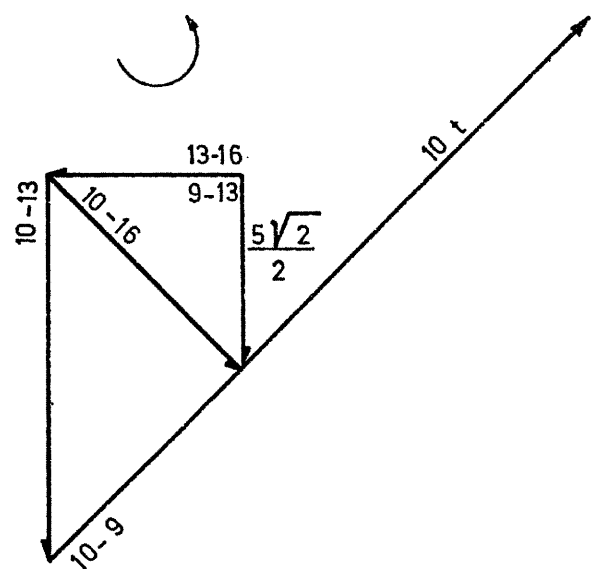


Fig. E2.6l.- Cremona de la Subestructura 3

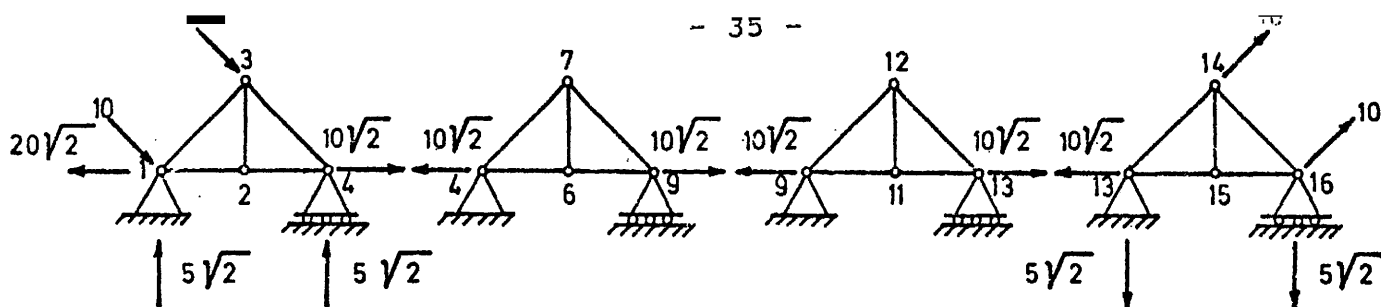


Fig. E 2.6 f
Subestructura 4

Fig. E 2.6 g
Subestructura 5

Fig. E 2.6 h
Subestructura 6

Fig. E 2.6 i
Subestructura 7

Tabla E2.6a.

Barra	ESFUERZOS COMO BARRA PERTENECIENTE A LA SUBESTRUCTURA					ESFUERZOS
	1	2	3	4 y 5	6 y 7	TOTALES
1-2	$+5\sqrt{2}$	$+25\sqrt{2}/2$		$+15$		$+45,96$
1-3	$+10$	-5				$+ 5,00$
2-4	$+5\sqrt{2}$	$+25\sqrt{2}/2$		$+15\sqrt{2}$		$+45,96$
2-3						
3-4				-10		$-10,00$
3-5	$+10$	-5				$+ 5,00$
4-5		$+5\sqrt{2}$				$+ 7,07$
4-6	$+5\sqrt{2}$	$+25\sqrt{2}/2$		$+10\sqrt{2}$		$+38,89$
4-7						
5-7		-15				$-15,00$
5-8	$+10$					$+10,00$
6-7						
6-9	$+5\sqrt{2}$	$+25\sqrt{2}/2$		$+10\sqrt{2}$		$+38,89$
7-9		-15				$-15,00$
8-9	0					
8-10	-10					$-10,00$
9-11	$+5\sqrt{2}$		$-5\sqrt{2}/2$		$+10\sqrt{2}$	$+17,68$
9-12			$+15$			$+15,00$
10-12			$+15$			$+15,00$
10-13			$-5\sqrt{2}$			$- 7,07$
10-14	-10		$+5$			$- 5,00$
11-12						
11-13	$+5\sqrt{2}$		$-5\sqrt{2}/2$		$+10\sqrt{2}$	$+17,68$
12-13						
13-14					$+10$	$+10,00$
13-15	$+5\sqrt{2}$		$-5\sqrt{2}/2$		$+5$	$+10,61$
14-15					0	
14-16	-10		$+5$		0	$-15,00$
15-16	$+5\sqrt{2}$		$-5\sqrt{2}/2$		$+5\sqrt{2}$	$+10,61$

Ejercicio E2.7

Determinar aproximadamente los esfuerzos en todas las barras de la figura E2.7a.

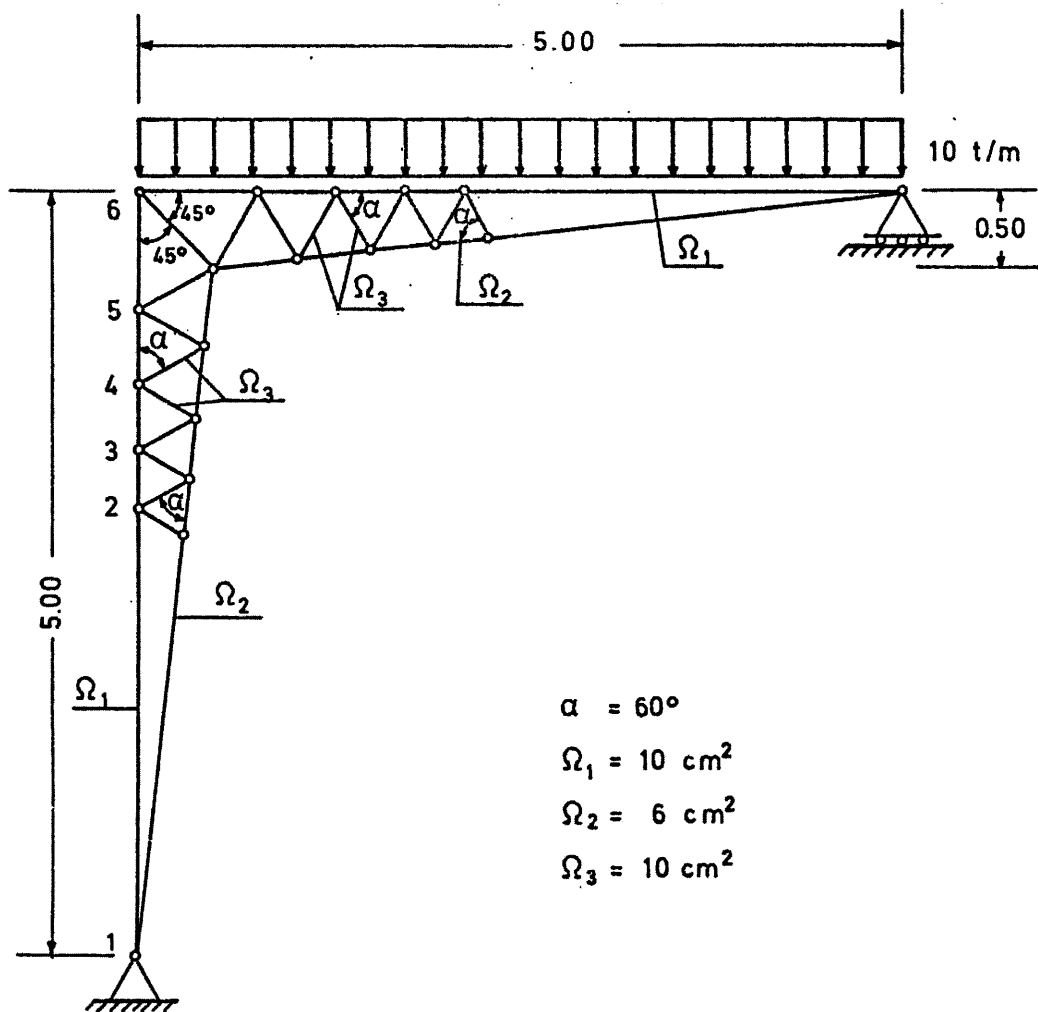


Fig. E 2.7 a

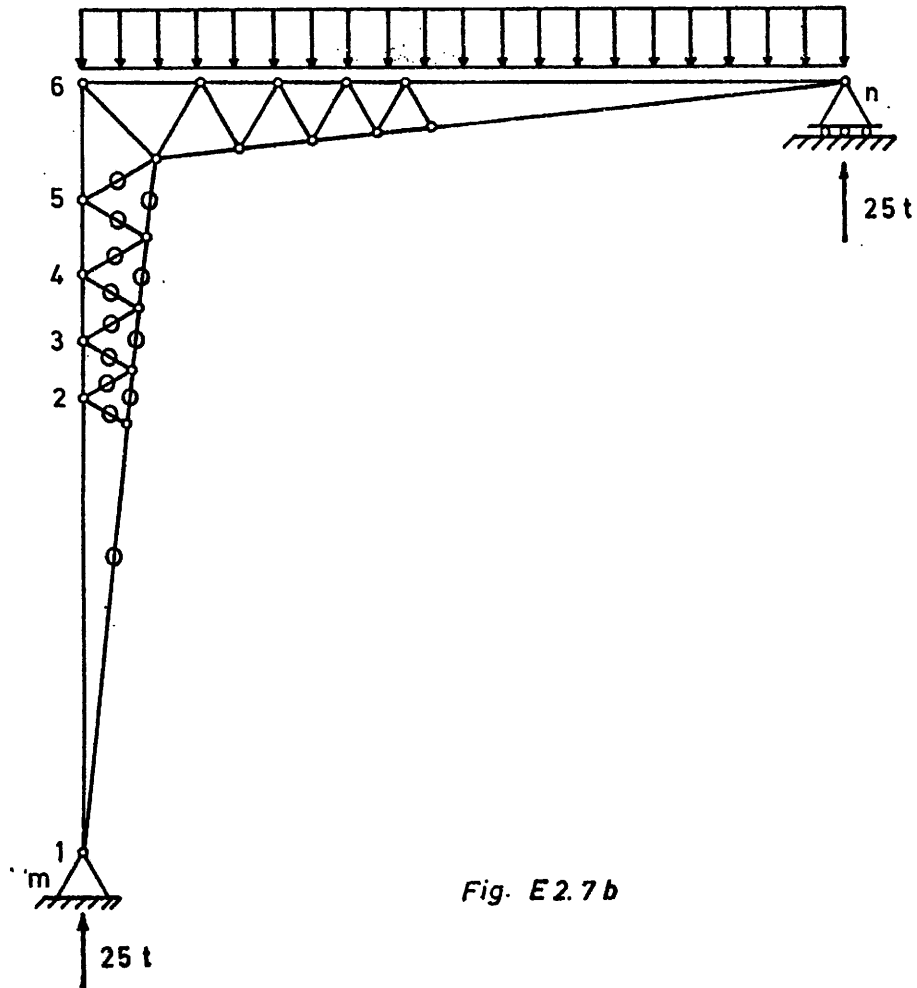


Fig. E2.7 b

Las reacciones en los apoyos son:

$$P_{xm}^* = 0$$

$$5 \cdot 10 = P_{ym}^* + P_{yn}^*$$

$$50 \cdot 2,5 - P_{yn}^* \cdot 5 = 0 ; P_{yn}^* = 25 \text{ t}$$

Todas las barras marcadas con un círculo en la figura E2.7b no trabajan. Las 1-2; 2-3; 3-4; 4-5 y 5-6, trabajan a una compresión 25 t.

La estructura se puede reducir a la que se representa en la figura E2.7c. Aplicando que $\Omega_1 g_1 = \Omega_2 g_2$; $10g_1 = 6g_2$;

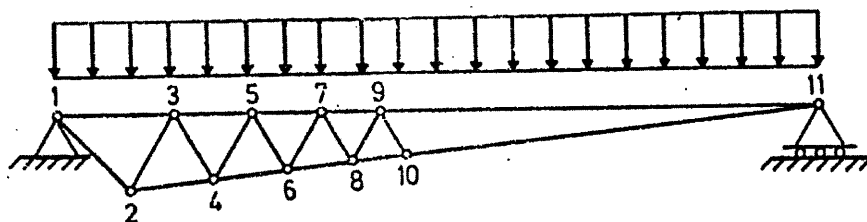
$$\frac{10}{6} = \frac{g_2}{g_1} .$$


Fig. E2. 7 c

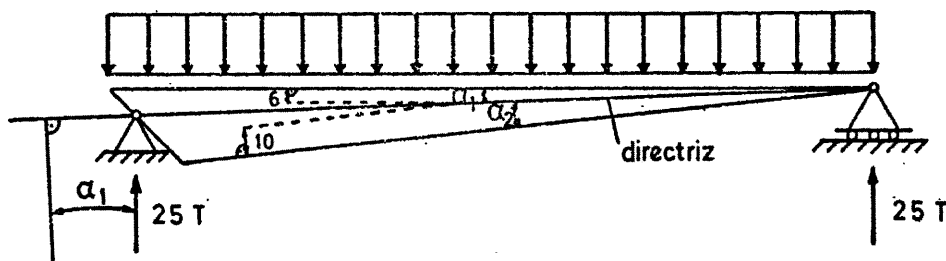


Fig. E2.7 d

Si se mide en la figura E2.7d sale:

$$\alpha_1 = 2,5^\circ$$

$$\alpha_2 = 4^\circ$$

Para hallar las componentes de las fuerzas sobre la directriz y sobre la normal a la directriz, que proporcionan los esfuerzos y cortantes, se tiene proyectando las reacciones:

Componente normal a la directriz:

$$25 \cdot \cos \alpha_1 = 25 \cdot \cos 2,5^\circ = 25 \cdot 0,999 = 24,975$$

Componente según la directriz:

$$25 \cdot \operatorname{sen} \alpha_1 = 25 \cdot \operatorname{sen} 2,5^\circ = 25 \cdot 0,0436 = 0,109$$

Análogamente, se procedería con la carga continua. Se puede apreciar fácilmente que el influjo por axil - es despreciable y sólo se considera el fléctor y el cortante, con la carga continua de $10 \frac{t}{m}$ y las reacciones de 25 t perpendiculares a la directriz, cuyas leyes se dibujan en la figura E2.7e y E2.7f.

Se calcularán en primer lugar las cabezas teniendo en cuenta $N \approx 0$. En las cabezas superiores se verifica:

$$\frac{N_1}{\Omega_1} = - \frac{M h_2}{h_1^2 \Omega_1 \cos \Omega_1 + h_2^2 \Omega_2 \cos \Omega_2}$$

y en las cabezas inferiores se deduce:

$$\frac{N_2}{\Omega_2} = \frac{M h_2}{h_1^2 \Omega_1 \cos \Omega_1 + h_2^2 \Omega_2 \cos \Omega_2}$$

Donde N viene dado en T

M viene dado en T x m

h viene dada en m

Ω viene dada en m^2

La resolución para cada barra aparece en la tabla E2.7a, donde el proceso de cálculo se ejecuta de forma mecánica.

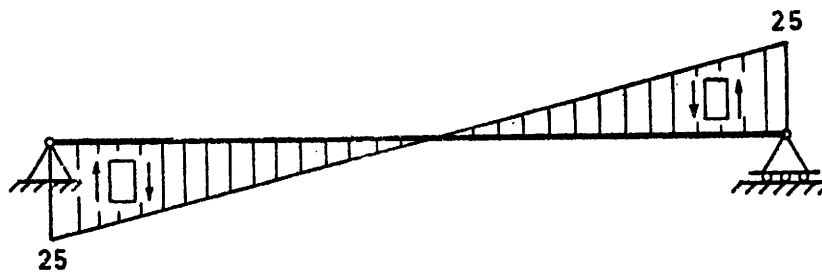


Fig. E2. 7e

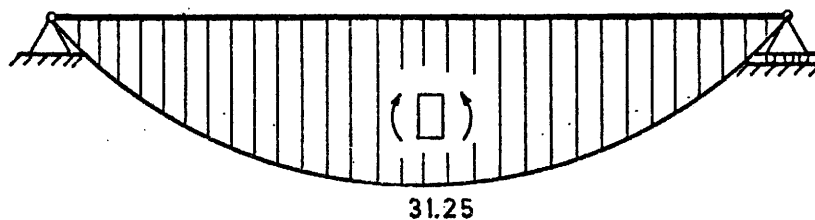


Fig. E 2. 7 f

Tabla E2.7a.

BARRA	Ω_1	Ω_2	$\cos \alpha_1$	$\cos \alpha_2$	a	b	h_1	h_1^2	A	h_2	h_2^2	B	$A + B$	M	D	E	N_1	F	N_2
					$\Omega_1 \cos \alpha_1$	$\Omega_2 \cos \alpha_2$			$h_1^2 a$			$h_2^2 b$			$M/A + B$	Dh_1	$E\Omega_1$	Dh_2	
1-3	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	1	1	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	0,175	0,03	$3 \cdot 10^{-5}$	0,3	0,09	$5,4 \cdot 10^{-5}$	$8,4 \cdot 10^{-5}$	12,12	$1,44 \cdot 10^5$	$2,52 \cdot 10^4$	-25,2		
2-4	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	1	1	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	0,175	0,03	$3 \cdot 10^{-5}$	0,39	0,09	$5,4 \cdot 10^{-5}$	$8,4 \cdot 10^{-5}$	12,12	$1,44 \cdot 10^5$			$4,32 \cdot 10^4$	+25,9
3-5	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	1	1	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	0,16	$2,56 \cdot 10^{-2}$	$2,56 \cdot 10^{-5}$	0,26	$6,76 \cdot 10^{-2}$	$4,05 \cdot 10^{-5}$	$6,61 \cdot 10^{-5}$	21,12	$3,19 \cdot 10^5$	$5,1 \cdot 10^4$	-51		
4-6	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	1	1	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	0,16	$2,56 \cdot 10^{-2}$	$2,56 \cdot 10^{-5}$	0,26	$6,76 \cdot 10^{-2}$	$4,05 \cdot 10^{-5}$	$6,61 \cdot 10^{-5}$	21,12	$3,19 \cdot 10^5$			$8,3 \cdot 10^4$	+49,8
5-7	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	1	1	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	0,13	$1,69 \cdot 10^{-2}$	$1,69 \cdot 10^{-5}$	0,23	$5,3 \cdot 10^{-2}$	$3,18 \cdot 10^{-5}$	$4,87 \cdot 10^{-5}$	26,66	$5,47 \cdot 10^5$	$7,1 \cdot 10^4$	-71		
6-8	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	1	1	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	0,13	$1,69 \cdot 10^{-2}$	$1,69 \cdot 10^{-5}$	0,23	$5,3 \cdot 10^{-2}$	$3,18 \cdot 10^{-5}$	$4,87 \cdot 10^{-5}$	26,66	$5,47 \cdot 10^5$			$12,6 \cdot 10^4$	+75,6
7-9	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	1	1	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	0,12	$1,44 \cdot 10^{-2}$	$1,44 \cdot 10^{-5}$	0,21	$4,4 \cdot 10^{-2}$	$2,64 \cdot 10^{-5}$	$4,08 \cdot 10^{-5}$	29,78	$7,28 \cdot 10^5$	$8,7 \cdot 10^4$	-87		
8-10	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	1	1	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	0,12	$1,44 \cdot 10^{-2}$	$1,44 \cdot 10^{-5}$	0,21	$4,4 \cdot 10^{-2}$	$2,64 \cdot 10^{-5}$	$4,08 \cdot 10^{-5}$	29,78	$7,28 \cdot 10^5$			$15,3 \cdot 10^4$	+91,8
9-11	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	1	1	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	0,1	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-5}$	0,17	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$1,74 \cdot 10^{-5}$	$2,74 \cdot 10^{-5}$	31,25	$11,4 \cdot 10^5$	$11,4 \cdot 10^5$	-114		
10-11	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	1	1	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	0,1	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-5}$	0,17	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$1,74 \cdot 10^{-5}$	$2,74 \cdot 10^{-5}$	31,25	$11,4 \cdot 10^5$			$19,4 \cdot 10^4$	+116

donde $\alpha_1 = 2,5^\circ$

$\cos \alpha_1 = 0,999 \approx 1$

$\alpha_2 = 4^\circ$

$\cos \alpha_2 = 0,997 \approx 1$

El cálculo de los esfuerzos en las barras inclinadas se deduce de las leyes de cortantes. Así en el nudo 1, - según se ve en la figura E2.7g, donde el 0,2 de M_{1-3} se puede achacar a un error de cálculo, debido al proceso gráfico, se tiene:

$$N_{1-2} = \sqrt{25^2 + 25^2} = 25\sqrt{2}$$

El valor de N_{2-3} , teniendo en cuenta la figura - E2.7h, será:

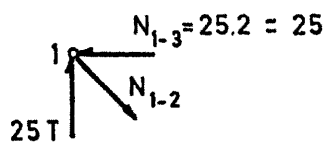


Fig. E2.7g

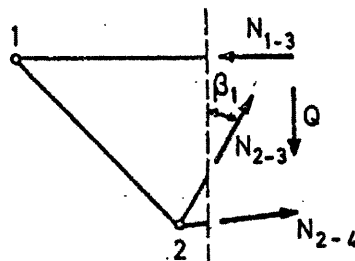


Fig. E2.7h

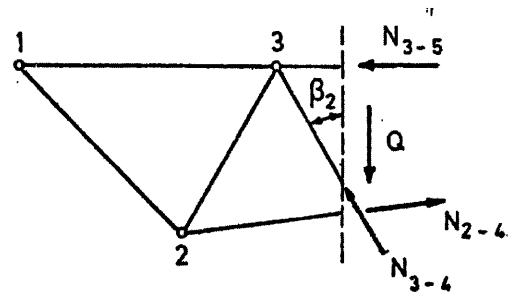


Fig. E2.7i

siendo $N_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \approx 0$

se sabe que $Q = N \cos \beta_1$

Ecuación que se cumple de manera análoga para todas las barras paralelas a 2-3 donde:

$$\beta_1 = 32^\circ$$

Algo análogo ocurre con las barras 3-4 y sus paralelas donde el ángulo es β_2 . (Figura E2.7i) con $\beta_2 = 30^\circ$

Los resultados se expresan en la tabla E2.7b.

Barra	$\cos\beta_1$	$\cos\beta_2$	Q	$Q/\cos\beta_1$	$Q/\cos\beta_2$	N(t)
2-3	0,848		20	23,6		+23,6
3-4		0,883	17		19,2	-19,2
4-5	0,848		14	16,6		+16,6
5-6		0,883	12		13,6	-13,6
6-7	0,848		10	11,8		+11,8
7-8		0,883	7		7,9	- 7,9
8-9	0,848		5	5,9		+ 5,9
9-10		0,883	3		3,36	- 3,36

Ejercicio E2.8.

Hallar los esfuerzos en todas las barras de la estructura articulada plana de la figura E2.8a.

Se supone que en la articulación del nudo 6 existe un rozamiento, tal que induce un momento exterior M proporcional al cambio del ángulo relativo $\Delta\theta$ entre las barras 4-6 y 5-6 que concurren en él. Se sabe que para una variación de ángulo de 10^{-3} radianes, aparece un momento de 50m.t.

Todas las barras son de sección constante e igual a 10 cm^2 . Modulo de elasticidad = $2 \cdot 10^6 \text{ kg. cm}^{-2}$.

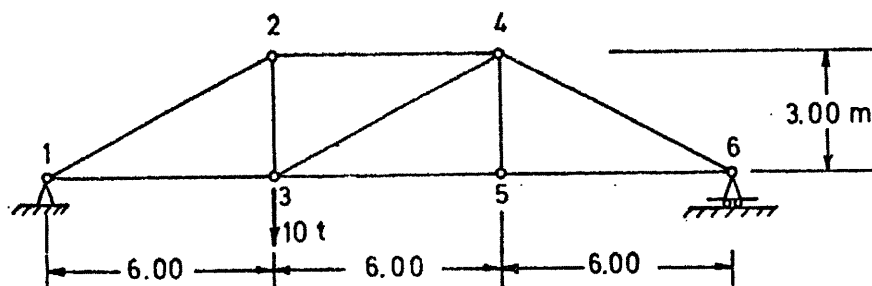
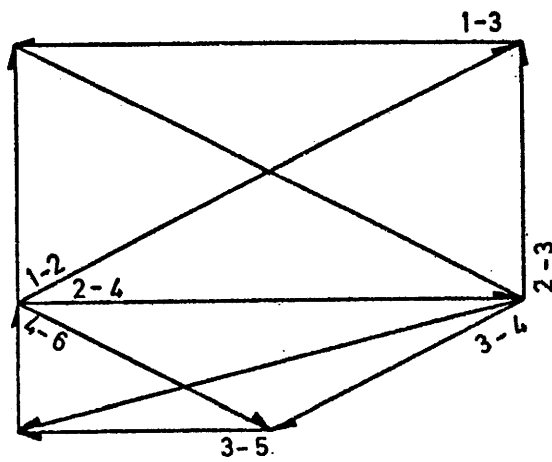
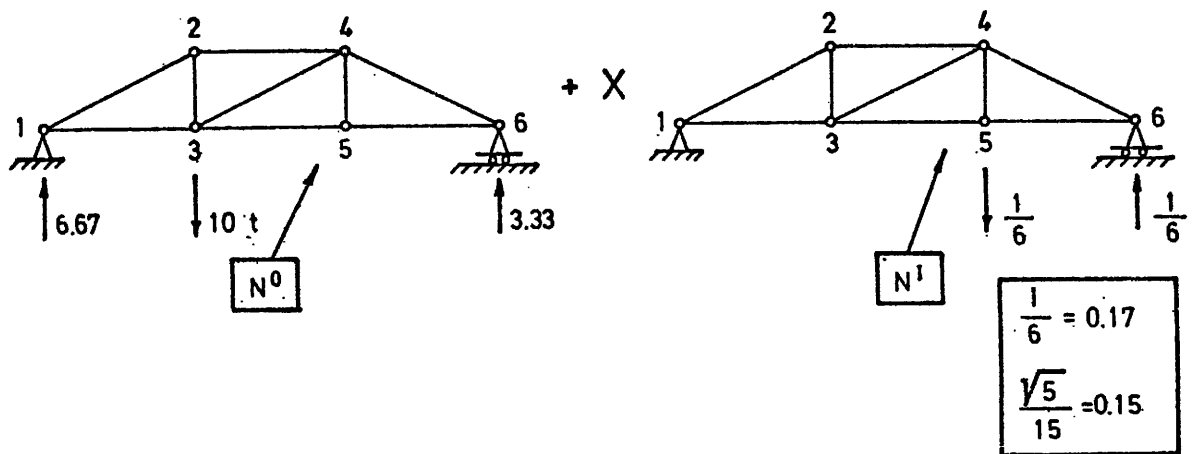


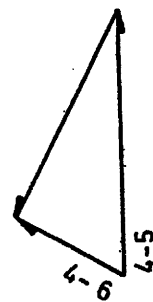
Fig. E2.8a

$$E\Omega = 2 \cdot 10^3 \text{ t.cm}^{-2} \cdot 10 \text{ cm}^2 = 2 \cdot 10^4 \text{ t.}$$

$$\frac{l_{45}}{E\Omega} = \frac{3}{2} \cdot 10^{-4} = 1,5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{t}} ; \quad \frac{l_{46}}{E\Omega} = \frac{6.708}{2} 10^{-4} = 3.354 \cdot 10^{-4}$$



ESTADO (0)



ESTADO (1)

Fig. E 2. 8 b

$$\frac{50 \text{ m.t}}{1 \text{ m.t}} \frac{10^{-3} \text{ rd}}{x \text{ rd}} x = \frac{10^{-3}}{50} = \frac{10 \cdot 10^{-5}}{5} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ rd.}$$

La condición que se debe imponer es:

$$\sum_{i=1}^{NB} \{ (N_i^0 + x N_i^I \frac{1_i}{E\Omega}) N_i^I = -x \cdot 2 \cdot 10^{-5}$$

$$\sum_{i=1}^{NB} N_i^0 \frac{1_i}{E\Omega} N_i^I + x \sum_{i=1}^{NB} (N_i^I)^2 = -2 \cdot 10^{-5} \cdot x$$

Teniendo en cuenta la figura E2.8b y lo anterior se escribe:

Tabla E2.8a.

Unidades	T	T	m/T	Txm	Txm	T
Factor común			$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$	
BARRA	N^0	N^I	$\frac{1_i}{E\Omega}$	$N^0 N^I / E\Omega$	$(N^I)^2 / E\Omega$	$N^F = N^0 + x N^I$
1-2	-15	0		0	0	-15
1-3	13.3	0		0	0	13.3
2-3	6.67	0		0	0	6.67
2-4	-13.3	0		0	0	-13.3
3-4	7.5	0		0	0	7.5
3-5	6.7	0		0	0	6.7
4-5	0	0.17	1,5	0	0.04335	-1.29
4-6	-7.5	-0.08	3.354	2.0124	0.0214656	-6.89
5-6	6.7	0		0	0	6.7
Σ				2.0124	0.08482	

en donde se obtiene:

$$2.0124 \cdot 10^{-4} + 0.06482 \cdot 10^{-4} \cdot x = -2 \cdot 10^{-5} x$$

$$2.0124 = -(0.06482 + 0,2)x \rightarrow \boxed{x = -7.6}$$

y los resultados se ven en la tabla E2.8a.

Ejercicio E3.1

En la estructura de la figura E3.1a, sometida a las cargas que figuran en la misma y a un aumento de temperatura en las barras 1-3 y 2-3 de 20°C, hallar el corrimiento vertical del nudo 5 y el giro de la barra 4-6.

Sección de todas las barras: $\Omega = 10 \text{ cm}^2$

Módulo de elasticidad: $E = 2 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

Coeficiente de dilatación térmica: $\alpha = 10^{-5}/^\circ\text{C}$

Estado (0): Figura E3.1a. Los esfuerzos correspondientes (N°) son los mismos que los del ejercicio E2.2.

Los incrementos de longitud debidos a la temperatura son:

$$\Delta L_{1-3} = 4,00 \cdot 20 \cdot 10^{-5} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m} = \Delta L_{2-3}$$

Estado auxiliar para el cálculo del desplazamiento vertical del nudo 5 {estado (1)}: Figura E3.1b y E3.1c (esfuerzos N^I): Dicho desplazamiento se calcula por medio de la tabla E3.1a.

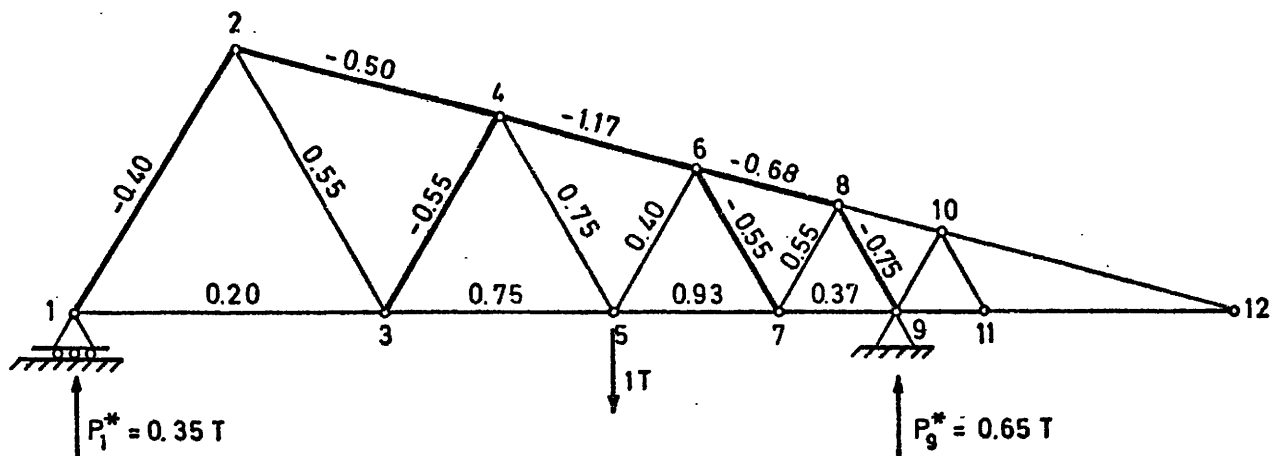
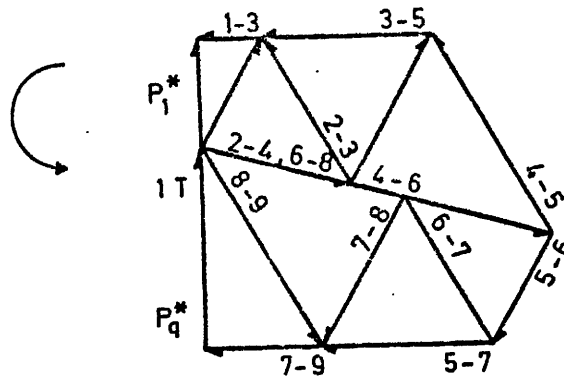


Fig. E3.1b Estado (1)



1T \equiv 4 cm.

Fig. E3.1c. - Cremona del estado (1)

Factor común		10^{-1}	10^{-1}		10^{-1}
Unidades	T	mm/T	mm	T	mm
Barra	N°	$\frac{L}{E\Omega}$	$N^{\circ} \frac{L}{E\Omega} + \Delta L_T$	N^I	$N^I (N^{\circ} \frac{L}{E\Omega} + \Delta L_T)$
1-2	-2,29	2,00	-4,58	-0,40	1,85
1-3	1,15	2,00	2,30 + 8 = 10,30	0,20	2,06
2-3	3,14	2,00	6,28 + 8 = 14,28	0,55	7,85
2-4	-2,80	1,80	-5,04	-0,50	2,52
3-4	-3,14	1,47	-4,62	-0,55	2,54
3-5	4,27	1,47	6,28	0,75	4,71
4-5	-1,20	1,47	-1,76	0,75	-1,32
4-6	-3,79	1,32	-5,00	-1,17	5,85
5-6	3,51	1,08	3,79	0,40	1,52
5-7	1,91	1,08	2,06	0,93	1,92
6-7	-4,79	1,08	-5,17	-0,55	2,84
6-8	0,50	0,97	0,49	-0,68	-0,33
7-8	4,79	0,79	3,78	0,55	2,08
7-9	-2,88	0,79	-2,28	0,37	-0,84
8-9	-9,26	0,79	-7,32	-0,75	5,49
8-10					
9-10					
9-11					
10-11					
10-12					
11-12					

Corrimiento vertical
del nudo 5

+3,874 mm.
hacia abajo

Estado auxiliar para el cálculo del giro de la barra 4-6: Figuras E3.1d y E3.1e (Esfuerzos N^{II}): El giro se obtiene a través de la tabla E3.1b.

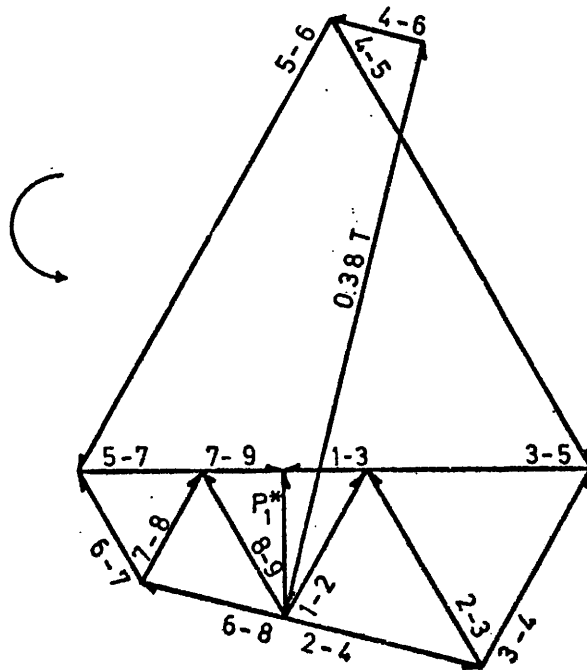
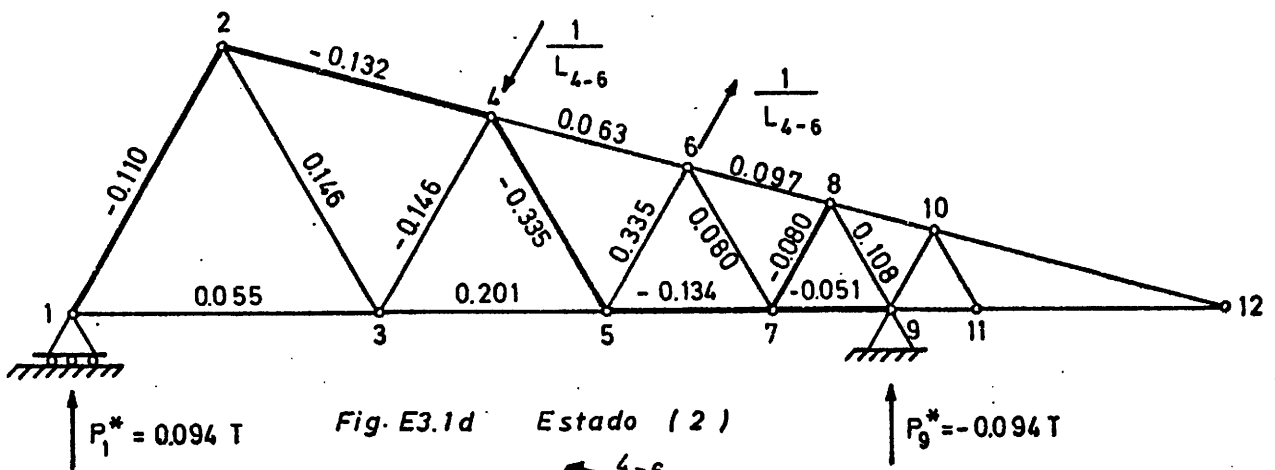


Fig. E3.1e
Cremona del estado (2)

Tabla E3.1b

Barra	N^{II}	$(\text{rad} \cdot 10^4)$ $N^{II} (N^{\circ} \frac{L}{E} + \Delta L_T)$
1-2	-0,110	0,50
1-3	0,055	0,57
2-3	0,146	2,08
2-4	-0,132	0,67
3-4	-0,146	0,68
3-5	0,201	1,26
4-5	-0,335	0,59
4-6	0,063	-0,32
5-6	0,335	1,27
5-7	-0,134	-0,28
6-7	0,080	-0,42
6-8	0,097	0,05
7-8	-0,080	-0,30
7-9	-0,051	0,12
8-9	0,108	-0,79
8-10		
9-10		
9-11		
10-11		
10-11		
11-12		

Giro barra 4-6 $+5,68 \cdot 10^{-4}$ rad.

Ejercicio E3.2

Obtener la deformada de la estructura de la figura E3.2a.

- Sección de todas las barras: $\Omega = 10 \text{ cm}^2$
- Módulo de elasticidad: $E = 2 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

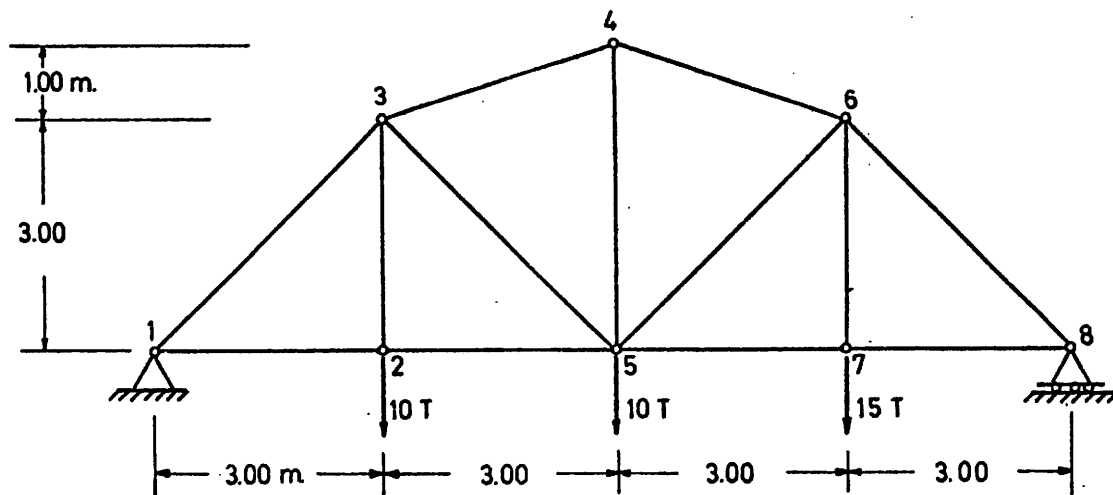


Fig. E 3.2 a

Las reacciones P_1^* y P_8^* son:

$$P_8^* = \frac{10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 15 \cdot 3}{4} = 18,75 \text{ T}$$

$$P_1^* = 10 + 10 + 15 - 18,75 = 16,25 \text{ T}$$

Los esfuerzos en las barras se obtienen en la Cremona de la figura E3.2c.

El resultado numérico del cálculo de esfuerzos se expresa en la Tabla E3.2a. También se indica en ella los alargamientos producidos en las barras por los axiles, que se calculan como sigue:

$$E\Omega = 2 \cdot 10^4$$

$$\Delta L = \frac{NL}{E\Omega}$$

Tabla E3.2a

Barra	N	L	ΔL
Unidades	T	m	mm
1-2	+16,25	3,00	+2,44
1-3	-23,00	4,24	-4,88
2-3	+10,00	3,00	+1,50
2-5	+16,25	3,00	+2,44
3-4	-17,70	3,16	-2,80
3-5	+ 0,70	4,24	+0,15
4-5	+11,50	4,00	+2,30
4-6	-17,70	3,16	-2,80
5-6	- 2,70	4,24	-0,57
5-7	+18,70	3,00	+2,80
6-7	+15,00	3,00	+2,25
6-8	-26,50	4,24	-5,62
7-8	+18,70	3,00	+2,80

Con estos resultados se efectúa el diagrama de Williet de la figura E3.2d.

En la tabla E3.2b se indican los movimientos de los nudos y en la figura E3.2e se ha dibujado la deformada.

TABLA E3.2b

NUDO	d_x (mm)	d_y (mm)	$d = d_x^2 + d_y^2$
2	2,5	16,60	16,70
3	8,05	15,05	16,90
4	5,45	16,00	16,75
5	5,05	18,30	18,85
6	2,20	16,45	16,60
7	7,90	18,75	20,00
8	10,60	0	10,60

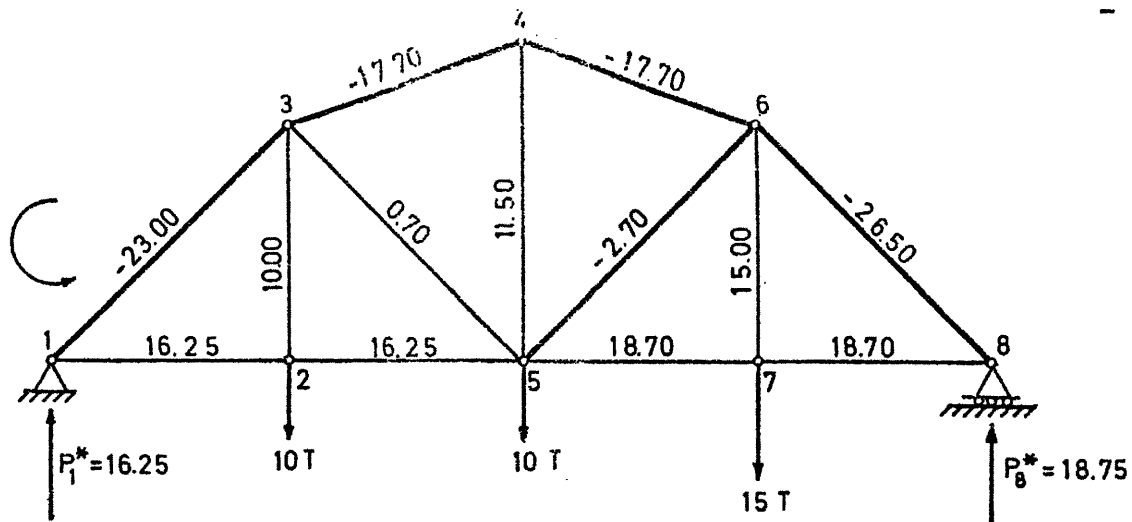


Fig. E3.2b

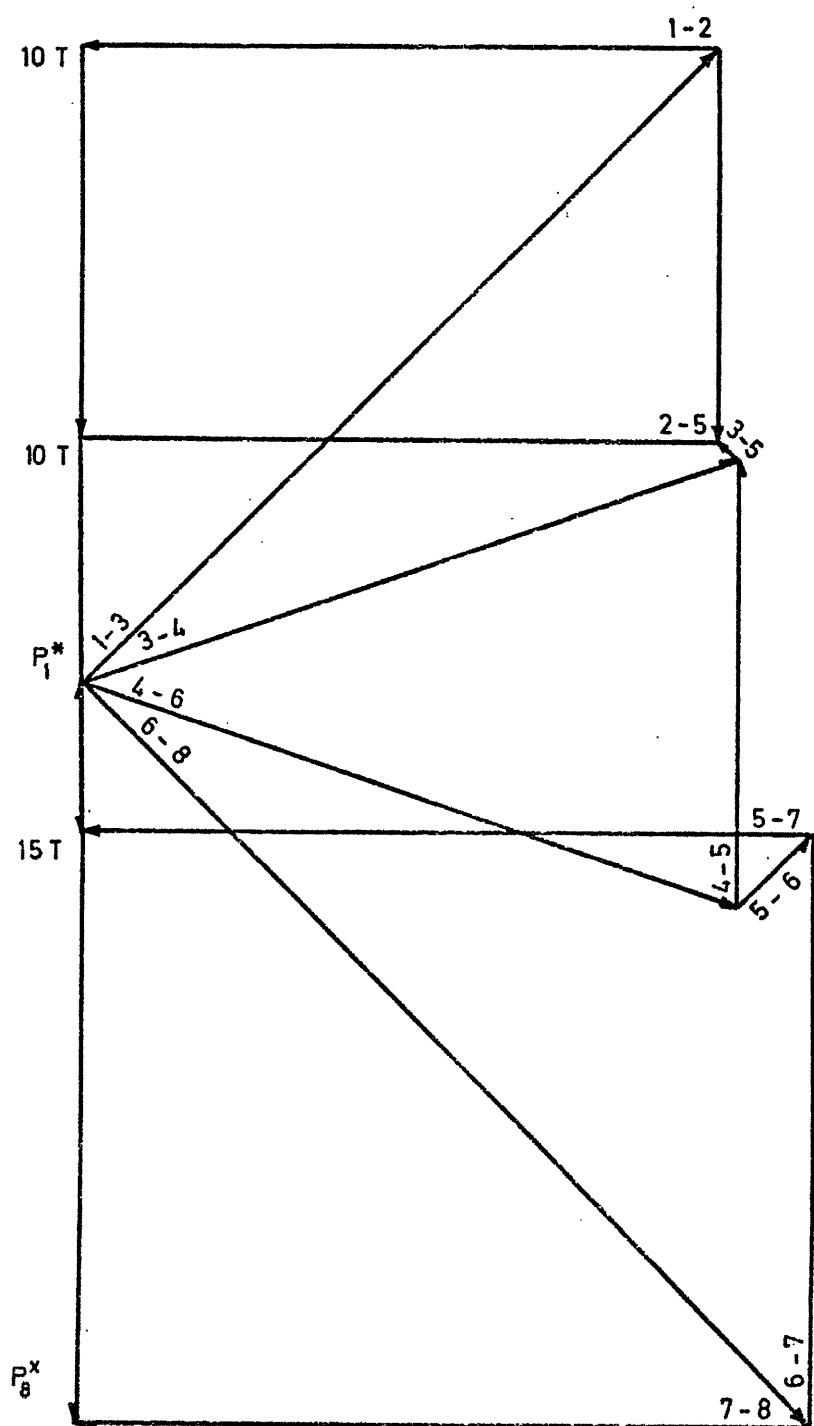
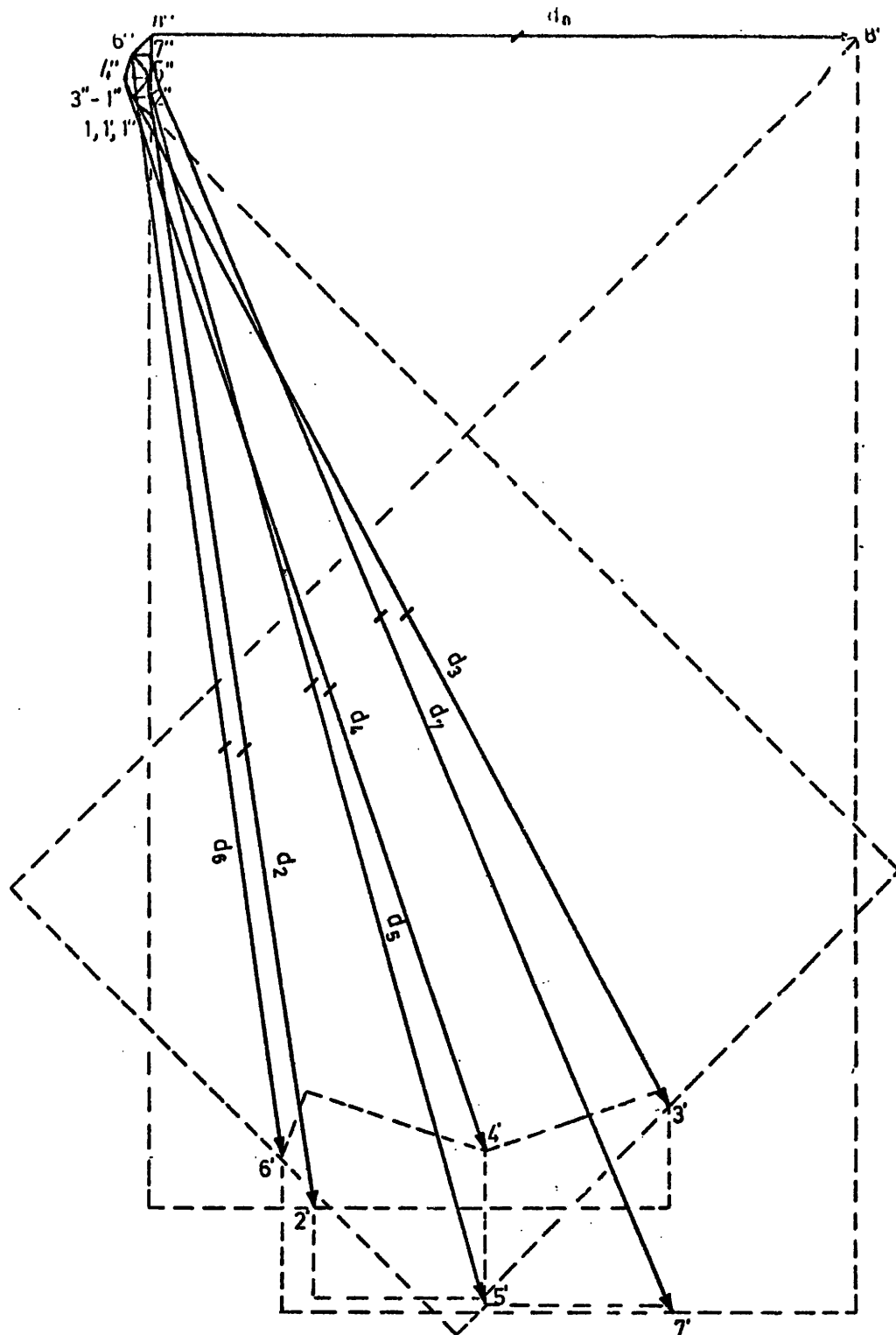


Fig. E3.2c . - Cremona

Escala: 1cm = 2 T



Dirección 4-5 fija

Escala : 1 cm. = 1 m.m.

Fig. E3.2d.- Diagrama de Williot

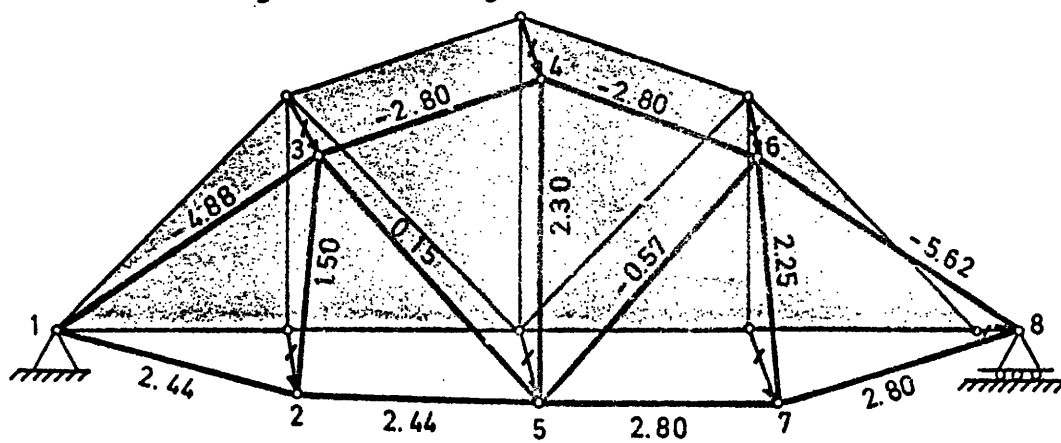


Fig. E3.2e.- Deformada . ΔL en mm.

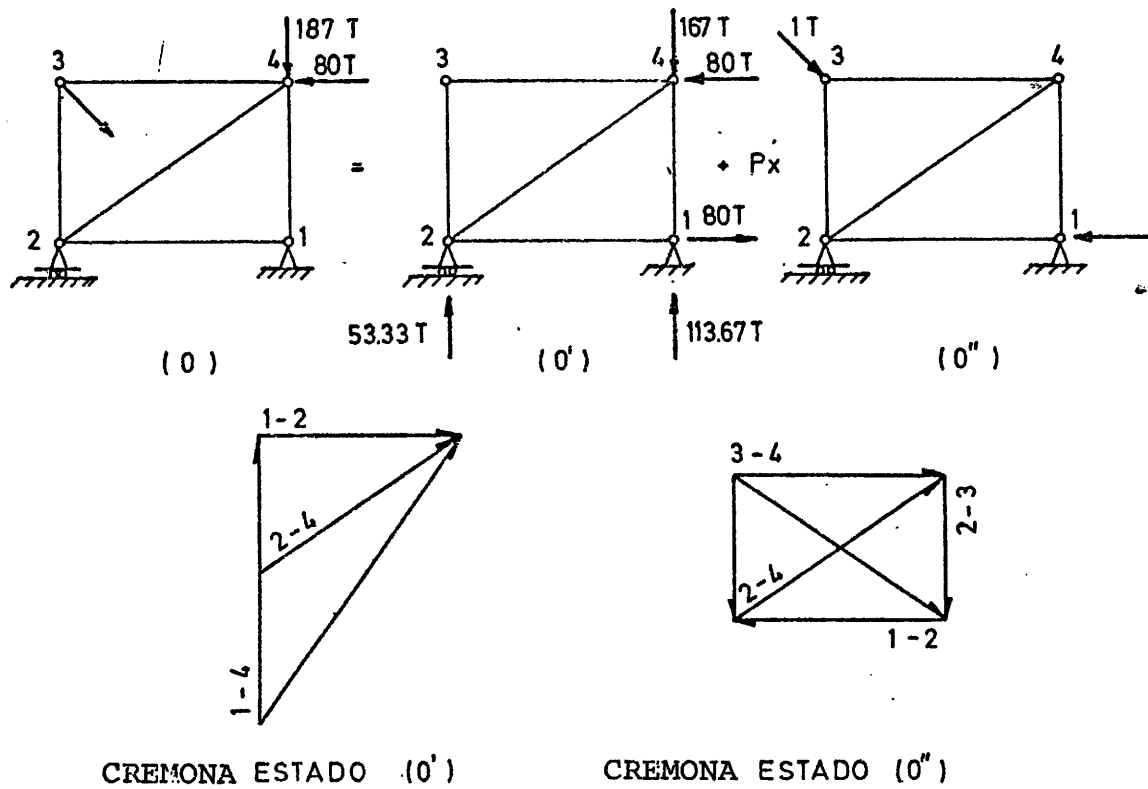


Fig. E3.3 b
(Estado (0) inicial de Cargas)

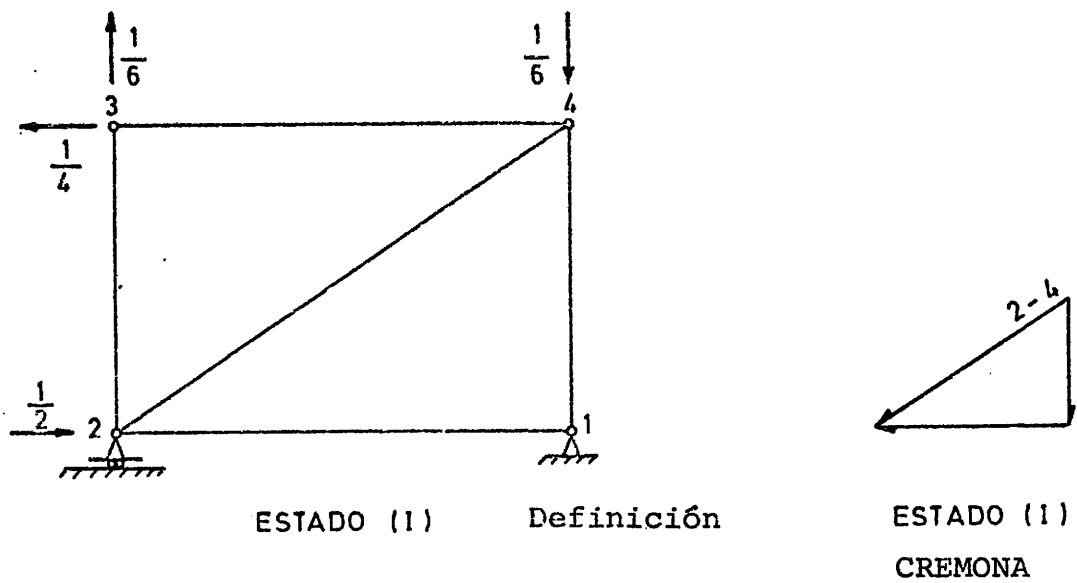


Fig. E3.3 c
(Estado auxiliar)

Ejercicio E3.3.

En la estructura de la figura E3.3a se pide determinar el valor de P de forma que bajo la acción de las cargas que se indican, el ángulo relativo de las barras 2-3 y 3-4 no sufra variación.

Se supone que P actúa en la dirección 3-1 y que para todas las barras $\frac{L}{EI}$ es constante.

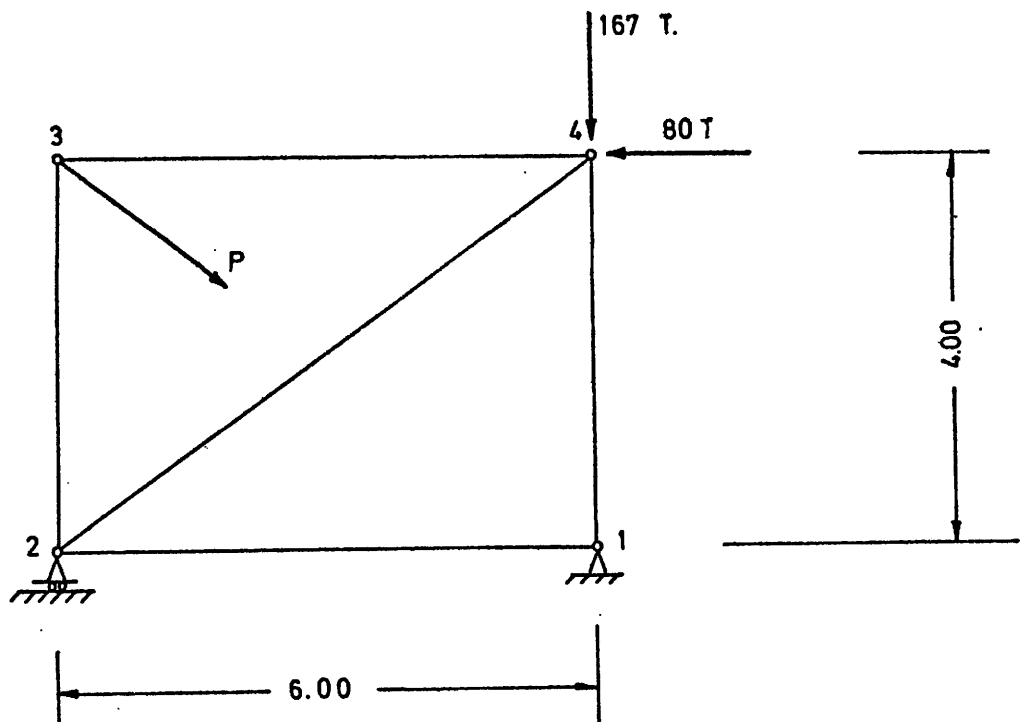


Fig. E 3.3 a

Para el estado (0) ver figura E3.3b. En la figura E3.3c se define y determinan los esfuerzos del estado (I).

La condición a imponer es:

$$\sum_{i=1}^{NB} N_i^0 N_i^I \frac{L}{E\Omega} = 0 \quad \text{con } N^0 = N^{0'} + N^{0''}$$

(ver figura E3.3b.)

Estas operaciones se realizan ordenadamente en la tabla E3.3a.

Tabla E3.3a.

BARRA	$N^{0'}$	$N^{0''}$	$N^0 = \delta^R \frac{E\Omega}{EI}$	N^I	$N^0 N^I$
1-2	80	-0,84	80-0,84 P	0	0
1-4	-113,67	-0,55	-113,67-0,55 P	0	0
2-3	0	-0,55	-0,55 P	0,167	-0,09185 P
2-4	-96	1	-96 + P	-0,30	28,8-0,3 P
3-4	0	-0,84	-0,84 P	0,25	-0,21 P
Σ					28,8-0,60185 P

$$28,8 - 0,60185 P = 0$$

$$P = 47,85 \text{ T}$$

Ejercicio E3.4.

Todas las barras de la estructura de la figura E3.4a tienen características semejantes a las definidas en la figura E3.4b.

Se pide:

Desplazamiento horizontal del nudo 3.

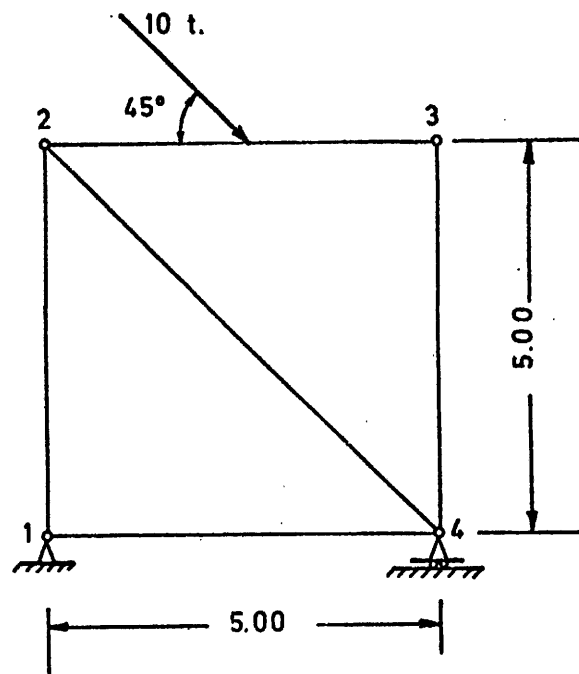


Fig. E 3.4 a

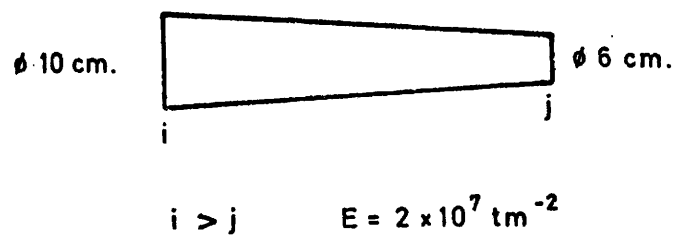
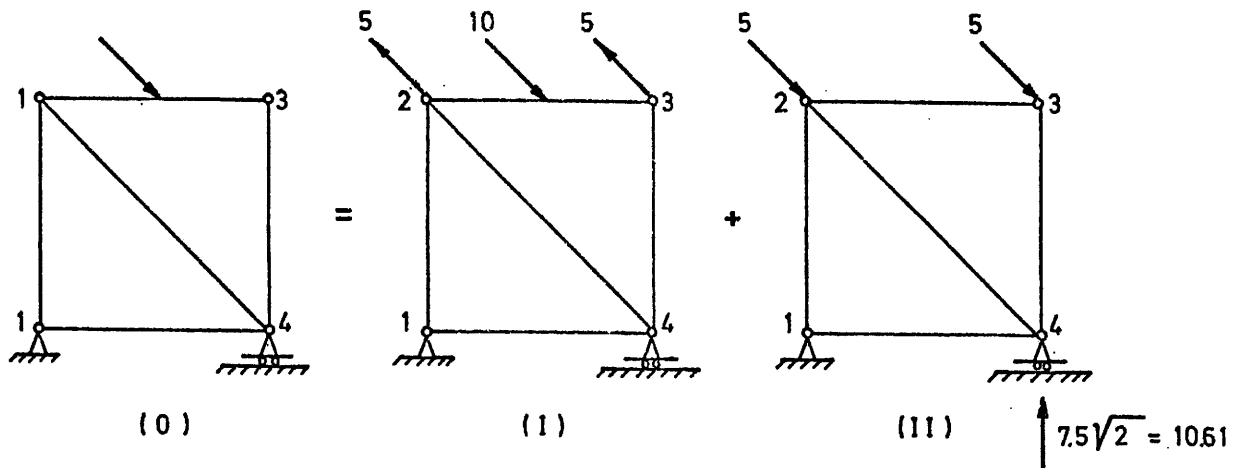


Fig. E3.4 b



Considerando las figuras E3.4c y E3.4d el desplazamiento horizontal del nudo 3 se obtiene como sigue:

$$d_{x3} = \sum_{i=1}^{NB} N_i^{II} N_i^{III} \frac{1}{E} \int \frac{ds}{\Omega} \{E3.3a\}$$

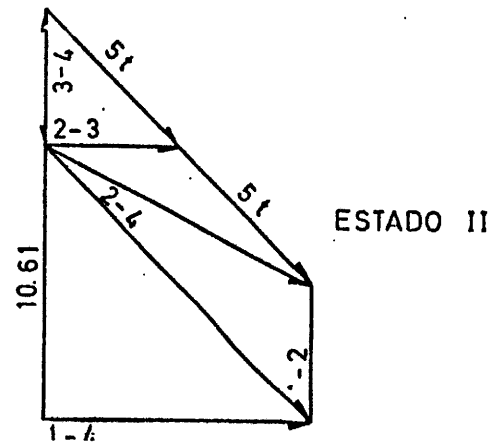


Fig. E 3.4 c

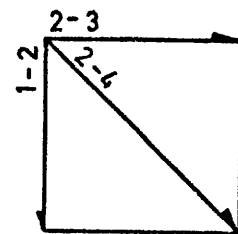
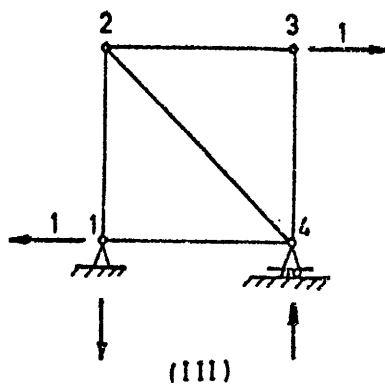


Fig. E3.4 d.

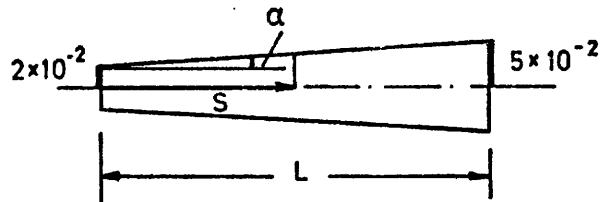


Fig. E3.4e

Según la figura E3.4e se tiene:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{L} ; R(s) = 3 \cdot 10^{-2} + \frac{2 \cdot 10^{-2}}{L} S = 10^{-2} \left\{ 3 + \frac{2}{L} S \right\}$$

$$I = \oint \frac{ds}{\Omega} = \int_0^L \frac{ds}{\pi \cdot 10^{-4} \left\{ 3 + \frac{2}{L} S \right\}^2} \quad \begin{array}{l} 3 + \frac{2}{L} S = t \\ S = 0 \rightarrow t = 3 \\ S = L \rightarrow t = 5 \end{array}$$

$$ds = \frac{L}{2} dt$$

$$\oint \frac{ds}{\Omega} = \frac{10^4}{\pi} \frac{L}{2} \int_3^5 \frac{dt}{t^2} = - \frac{10^4 L}{2\pi} \left\{ \frac{1}{t} \right\}_3^5 = - \frac{10^4 L}{2\pi} \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right\} =$$

$$= \frac{10^4 L}{2\pi} = \frac{2}{15} = \frac{10^4 L}{15\pi}$$

$$L = 5 : \frac{1}{E} \oint \frac{ds}{\Omega} = \frac{10^{-7}}{2} \cdot \frac{10^4 \cdot 5}{15\pi} = \frac{10^{-3}}{6\pi} = 5,3 \cdot 10^{-5}$$

$$L = 5\sqrt{2} : \frac{1}{E} \oint \frac{ds}{\Omega} = \frac{10^{-7} \cdot 10^4 \cdot 5\sqrt{2}}{2 \cdot 15\pi} = \frac{\sqrt{2} \cdot 10^{-3}}{6\pi} = 7,5 \cdot 10^{-5}$$

Las operaciones indicadas en E3.3a se realizan en la tabla E3.3a.

Tabla E3.3a.

Unidades	m/t	T	T	T.m
Factor común	10^{-5}			10^{-5}
BARRA	$\frac{1}{E} \oint \frac{ds}{\Omega}$	N^{II}	N^{III}	$N^{III} N^{II} \frac{1}{E} \oint \frac{ds}{\Omega}$
1-2	5,3	3,54	1	18,762
1-4	5,3	7,00	1	37,1
2-3	5,3	3,54	1	18,762
2-4	7,5	-10,00	- 2	106,066
3-4	5,3	- 3,54	0	0
Σ				180,70

Luego queda:

$$d_{x3} = 180,7 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 180,7 \cdot 10^{-3} \text{ cm.}$$

$d_{x3} = 0,181 \text{ cm}$

A este desplazamiento debe añadirse el producido en el estado I que es:

$$\Delta_0 = \oint \frac{ds}{E\Omega} N^I = 5 \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \int_0^{2,5} \frac{dx}{E\Omega} - \int_{2,5}^5 \frac{dx}{E\Omega} \right\} = 0,0047 \text{ cm}$$

es decir:

$$d_{x3} = 0,181 + \Delta_0 N_{2-3}^{III} = 0,181 + 0,005 = 0,186 \text{ cm.}$$

Barra AB

a) Líneas de influencia

Para hallar la línea de influencia del esfuerzo en la barra y se da un movimiento virtual como el de la figura E5.1b. Los desplazamientos verticales del cordón superior son a efectos de esta línea de influencia los indicados en la figura E5.1c. Los valores de los desplazamientos se hallan teniendo en cuenta la figura E5.1d.

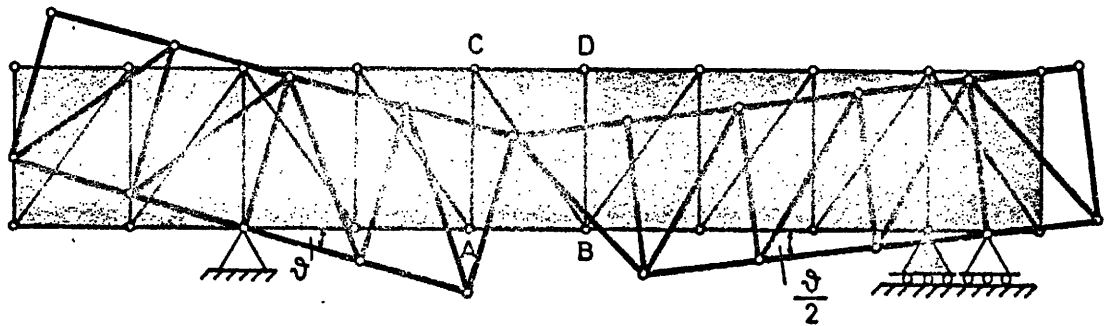


Fig. E5.1b.- Deformada virtual cortando la barra AB

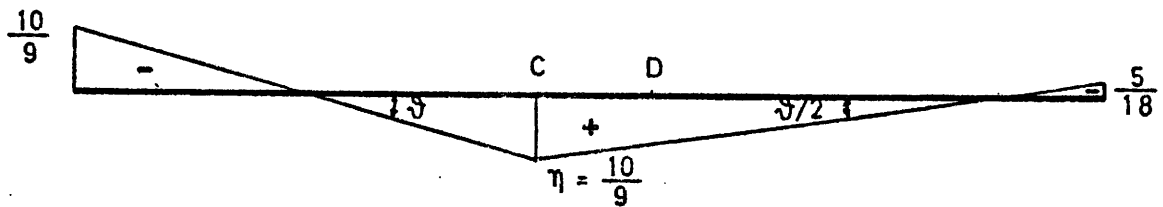


Fig. E5.1c.- Línea de influencia del esfuerzo en AB

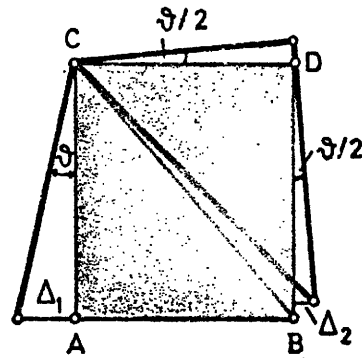


Fig. E 5.1d .- Deformada de la célula ABCD para el caso de la Fig. E5.1b

Deformada de la célula A B C D para el caso de la figura E5.1b

El alargamiento de la barra A-B es:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 3\theta + 3 \frac{\theta}{2} = \frac{9\theta}{2} = 1 \rightarrow \theta = \frac{2}{9} ; \eta = 5\theta = \frac{10}{9}$$

Barra AC

La línea de influencia del esfuerzo del montante AC se representa en la figura E5.1f.

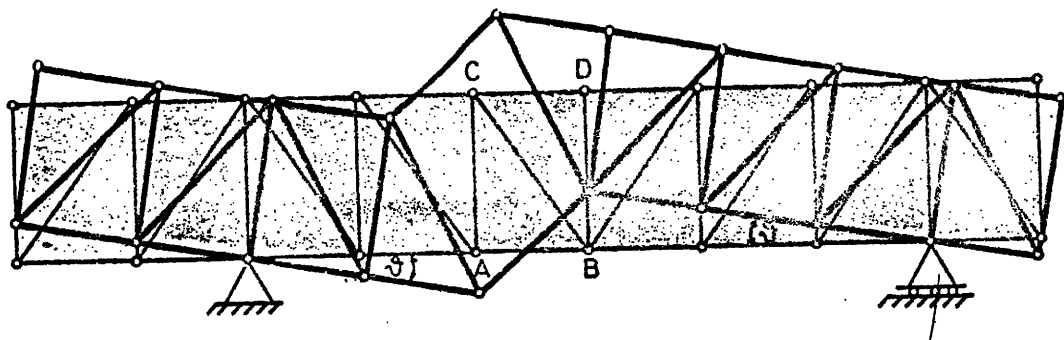


Fig. E5.1e .- Deformada virtual cortando la barra AC

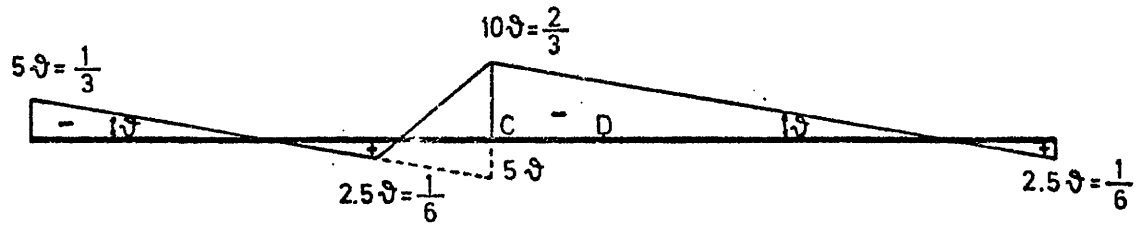


Fig. E5.1f.- Línea de influencia del esfuerzo en AC

El alargamiento del montante A-C es:

$$\Delta = 15\theta = 1; \quad \theta = \frac{1}{15}$$

Barra CB

Para la línea de influencia del esfuerzo de la barra CB se sigue el mismo procedimiento. (Figura E5.1f, - E5.1g y E5.1h).

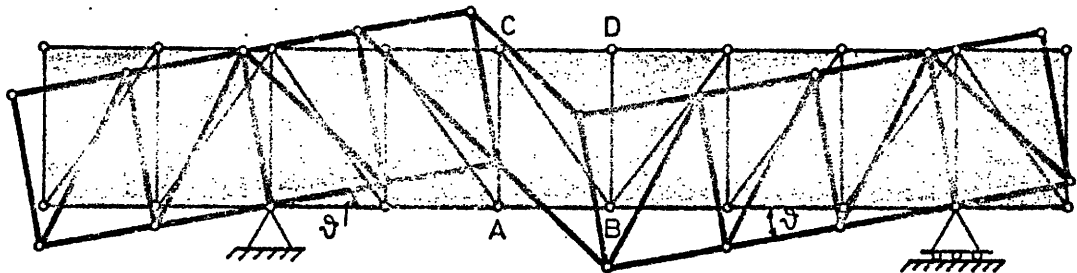


Fig. E5.1ff.- Deformada virtual cortando la barra CB

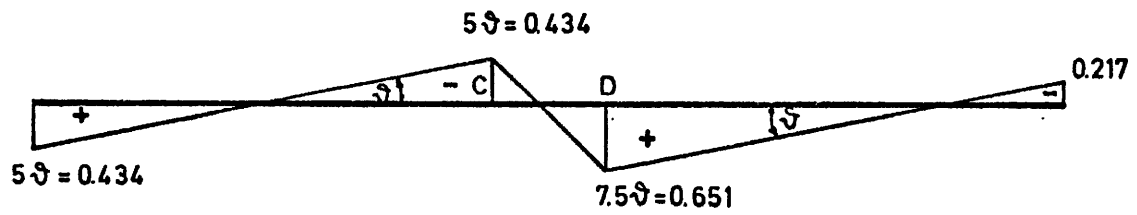


Fig. E5.1g.- Línea de influencia del esfuerzo en la barra CB

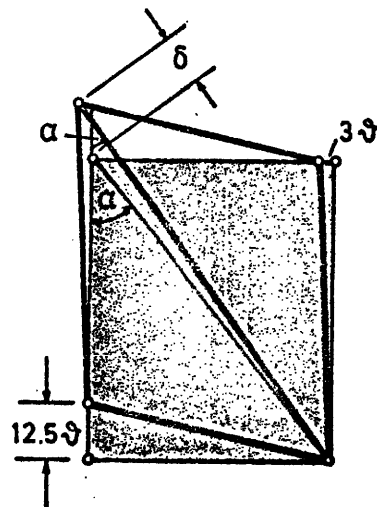


Fig. E5.1h.- Deformada la célula ABCD para el caso de la Fig. E5.1e

$$\Delta = 12,5\delta \cdot \cos\alpha + 3\delta \cdot \operatorname{sen}\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 2 \cdot 5^2}} = 0,768 ; \operatorname{sen}\alpha = 0,640$$

$$\theta = \frac{1}{12,5 \cdot 0,768 + 3 \cdot 0,640} = 0,0868$$

Barra CD

El caso de la barra C-D se expresa en las figuras E5.1i, E5.1j y E5.1k.

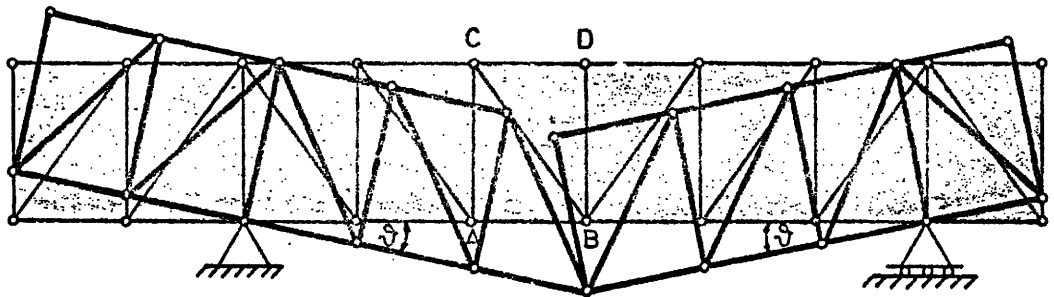


Fig. E5.1i. - Deformada virtual cortando la barra CD

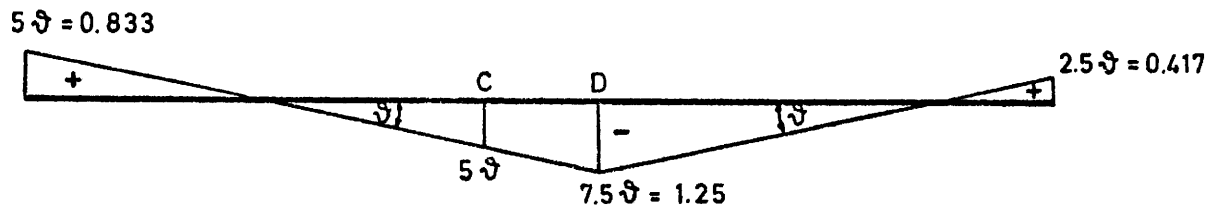


Fig. E5.1j. - Línea de influencia del esfuerzo en la barra CD

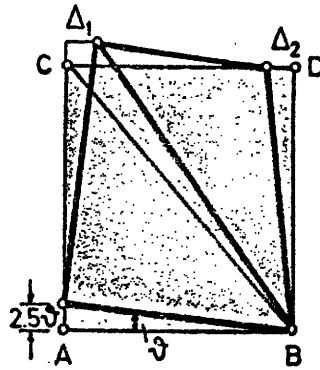


Fig. E5.1 k .- Deformada de la célula ABCD para el caso de la Fig.E5. li

El alargamiento de la barra C-D es:

$$\Delta = - (\Delta_1 + \Delta_2) = -6\theta = 1 ; \quad \theta = - \frac{1}{6}$$

Barra DB

La línea de influencia del esfuerzo en la barra DB se puede ver en la figura E5.1m.

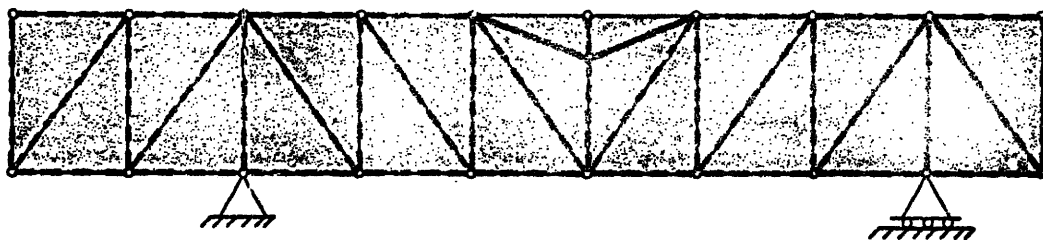


Fig. E5.1 l.- Deformada virtual cortando la barra DB

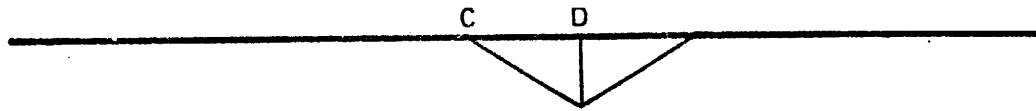


Fig. E5.1m. - Línea de influencia del esfuerzo en la barra DB

- b) Esfuerzos máximo y mínimo de la barra AC para carga uniforme.

Para el caso de máxima tracción se cargan las zonas de la línea de influencia señaladas con el signo (+) en la figura E5.1n. Para la máxima compresión se cargan las zonas señaladas con el signo (-) en la misma figura.

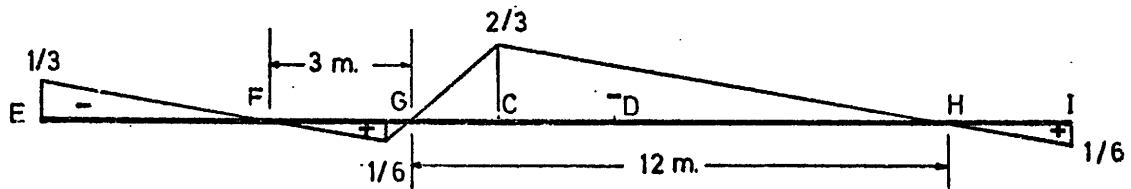


Fig. E 5.1 n

MAXIMA TRACCION

Habrá que cargar los tramos FG y HI

$$N_{\max}^+ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 2,5 = 0,458 \text{ t}$$

MAXIMA COMPRESION

Habrá que cargar los tramos EF y GH.

$$N_{\max}^- = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = 4,833 \text{ t.}$$

Una forma alternativa de resolver la parte a) de este ejercicio consiste en dibujar la forma de la línea de influencia, deducida según las anteriores consideraciones, que, en general, serán trozos de recta. Los valores característicos se pueden calcular mediante secciones o consideraciones de equilibrio de acuerdo con las ideas que se indican a continuación:

Se considera el estado de cargas de la figura E5.1p.

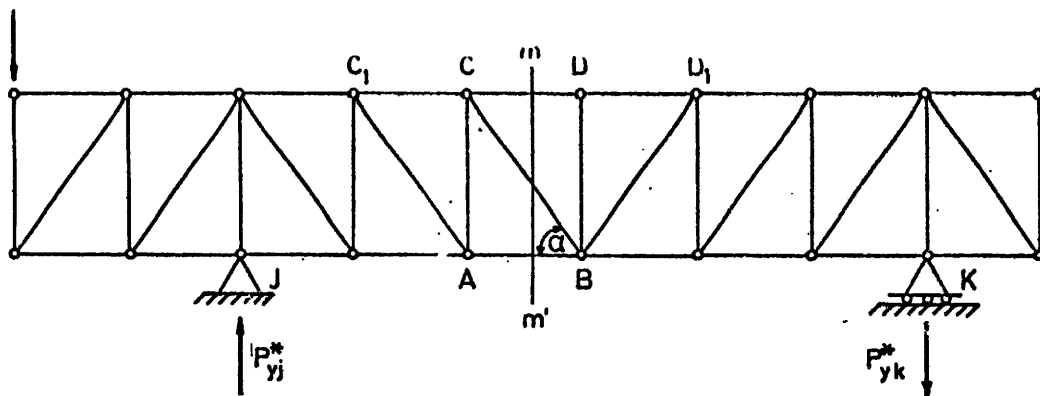


Fig. E 5.1 p

$$1 \cdot 5 = P_{yk}^x \cdot 15; P_{yj}^* - P_{yk}^* = 1; P_{yj}^* = \frac{4}{3}; P_{yk}^* = \frac{1}{3}$$

Los valores característicos son las magnitudes de los esfuerzos de las barras AB, CD, AC y DB.

Efectuando la sección mm' y tomando momentos respecto a C se tiene:

$$N_{AB} \cdot 3 = -P_{yk}^* \cdot 10; N_{AB} = -\frac{10P_{yk}^*}{3} = -\frac{10}{9} \text{ (compresión)}$$

Con este valor ya se puede dibujar la línea de influencia de la figura E5.1c.

Efectuando la misma sección anterior y tomando momentos respecto a B se tiene:

$$N_{CD} \cdot 3 = 1 \cdot 12,5 - \frac{4}{3} \cdot 7,5 = \frac{2,5}{3} = \frac{5}{6} \text{ (tracción)}$$

Con este valor se puede dibujar la línea de influencia de la figura E5.1j.

El valor del esfuerzo en CB es:

$$P_{yj}^* - 1 = \frac{1}{3} = N_{CB} \operatorname{sen} \alpha; N_{CB} = 0,4339 \text{ (tracción)}$$

Con este valor se puede dibujar la línea de influen

cia de la figura E5.1f.

Planteando el equilibrio del nudo C se tiene la figura E5.1q.

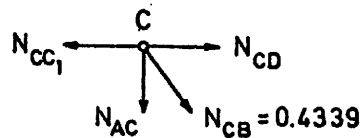


Fig. E5.1q.- Equilibrio del nudo C

$$N_{AC} + N_{CB} \operatorname{sen} \alpha = 0; \quad N_{AC} = -\frac{1}{3} \text{ (compresión)}$$

Con este valor se puede dibujar la línea de influencia de la figura E5.1f.

De forma semejante se puede proceder con el nudo D, como se representa en la figura E5.1s para el caso de una carga vertical descendente de 1 T actuando en dicho nudo

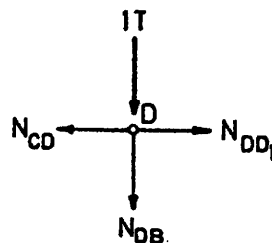


Fig. E5.1s.- Equilibrio del nudo D

$$N_{DB} + 1 = 0; \quad N_{DB} = -1 \text{ (compresión)}$$

La línea de influencia es la dibujada en la figura E5.1m.

Ejercicio E6.1

Obtener los esfuerzos en todas las barras de la figura E6.1a siendo $\frac{L}{E\Omega} = C^{te}$.

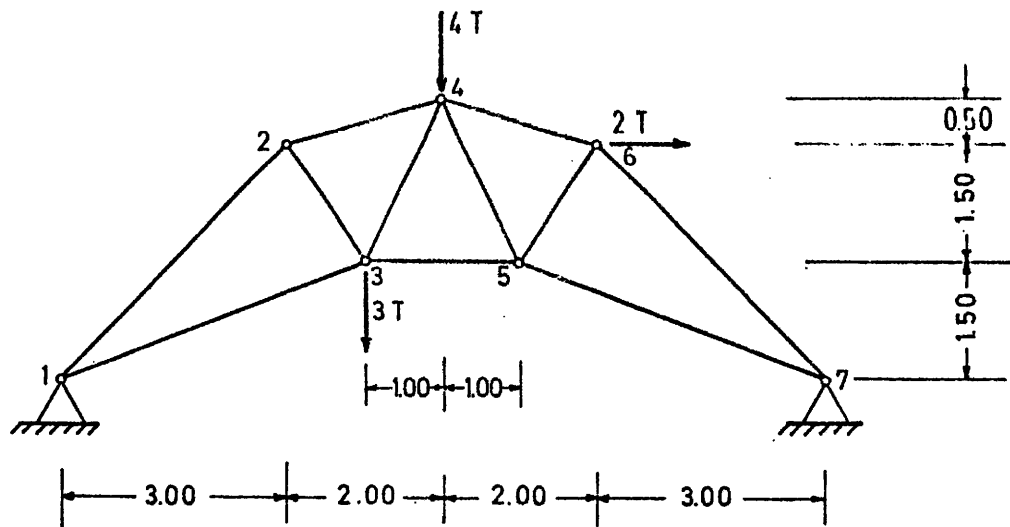
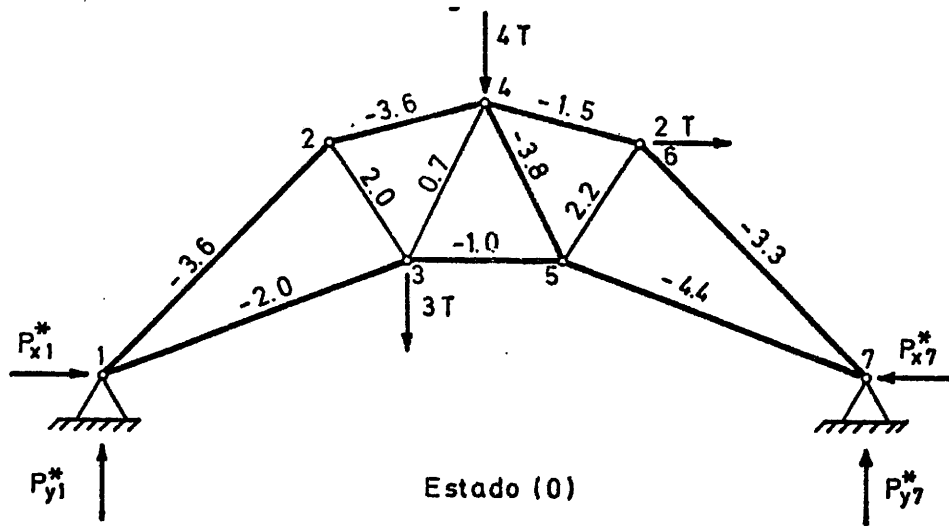


Fig. E6.1a

Se resolverá el problema descomponiendo en los dos



=

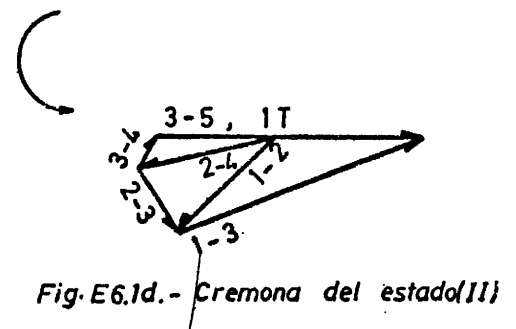
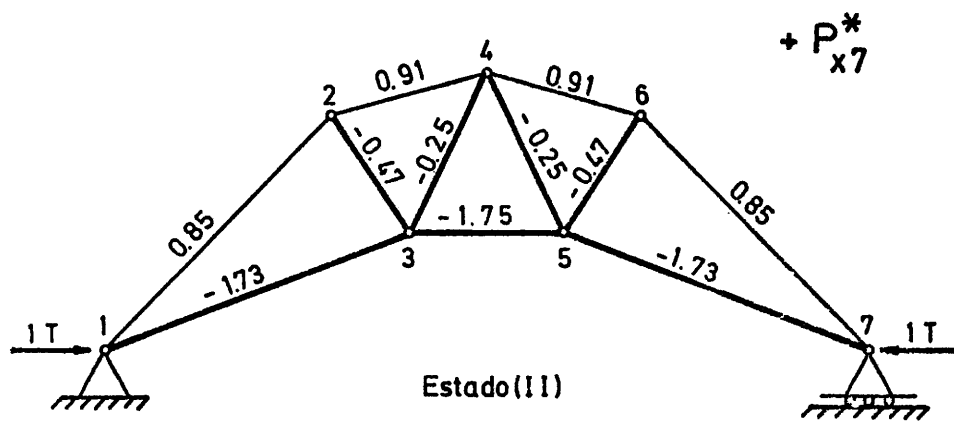
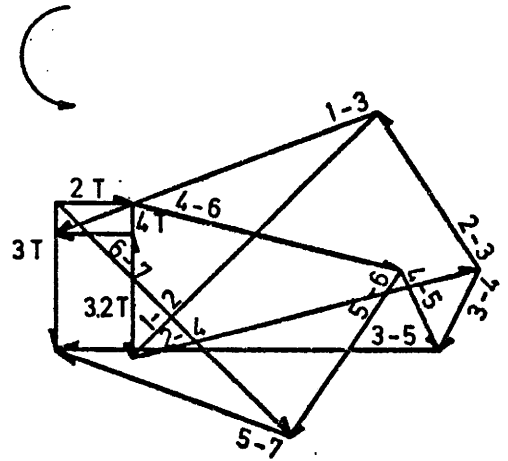
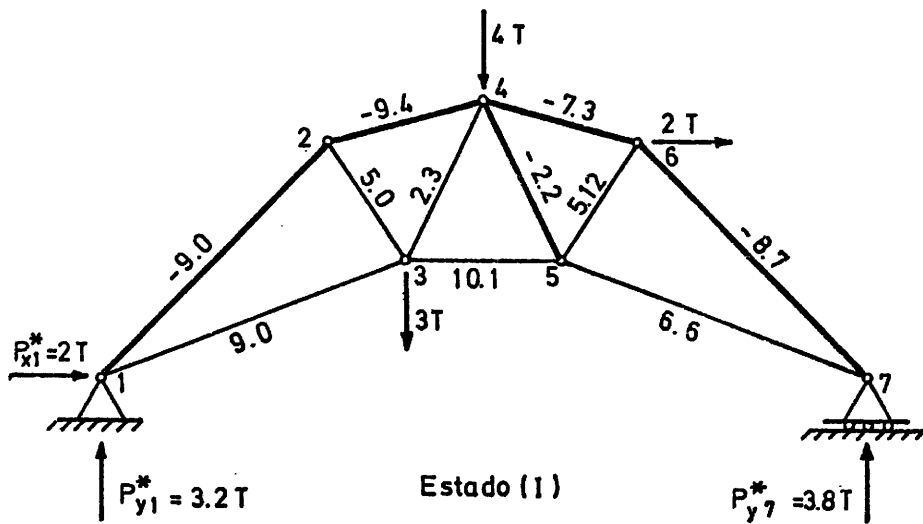


Fig. E 6.1 b .- Descomposición en estados

N^I = esfuerzos del estado (I)

N^{II} = esfuerzos del estado (II)

Obligando a que el nudo 7 no se mueva se obtiene según los resultados de la tabla E6.1a.

$$P_{x7} = - \frac{\sum_{i=1}^{11} N^I N^{II}}{\sum_{i=1}^{11} (N^{II})^2} = \frac{-80,84}{12,714} = 6,36 \text{ T}$$

Los esfuerzos finales se calculan como sigue:

$$N^F = N^I + P_{x7} \cdot N^{II} \text{ (tabla E6.1a)}$$

Tabla E6.1a

Barra	L/E	N^I	N^{II}	$N^I N^{II}$	$(N^{II})^2$	$P_{x7} N^{II}$	N^F
1-2	cte.	-9	0,85	- 7,65	0,722	5,4	-3,6
1-2	cte.	9	-1,73	-15,57	2,995	-11	-2,0
2-3	cte.	5	-0,47	- 2,35	0,221	- 3	2,0
2-4	cte.	-9,4	0,91	- 8,55	0,827	5,8	-3,6
3-4	cte.	2,3	-0,25	- 0,57	0,062	- 1,6	0,7
3-5	cte.	10,1	-1,75	-17,70	3,060	-11,1	-1,0
4-5	cte.	-2,2	-0,25	0,55	0,062	- 1,6	-3,8
4-6	cte.	-7,3	0,91	- 6,64	0,827	5,8	-1,5
5-6	cte.	5,2	-0,47	- 2,44	0,221	- 3	2,2
5-7	cte.	6,6	-1,73	-11,42	2,995	-11	-4,4
6-7	cte.	-8,7	0,85	- 7,40	0,722	5,4	-3,3
Σ				-80,84	12,714		

Ejercicio E6.2

Hallar los esfuerzos en las barras de la estructura de la figura E6.2a.

Sección de todas las barras: 5 cm^2

Módulo de elasticidad: $2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$

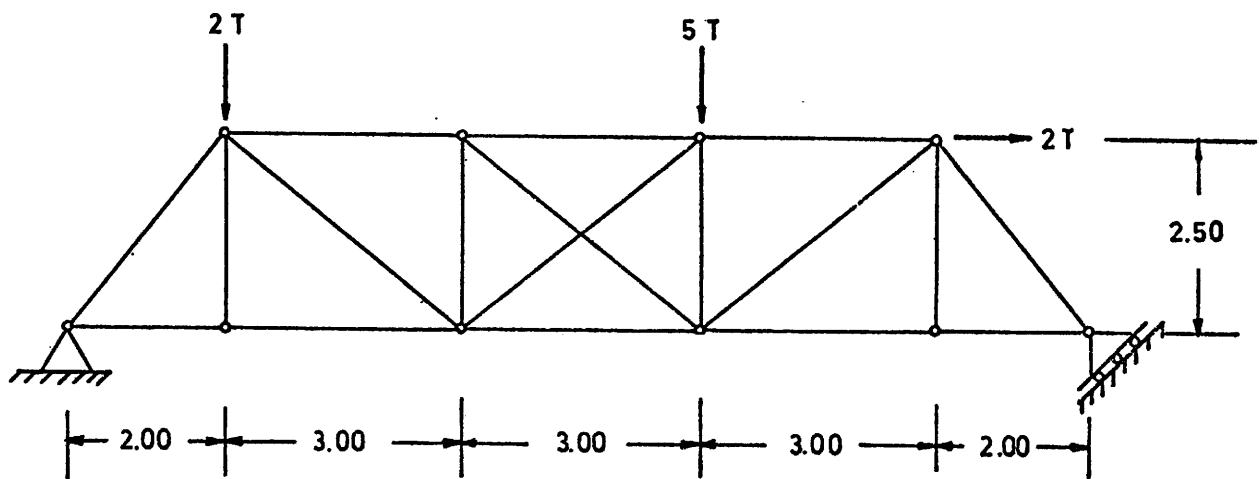


Fig. E6.2a

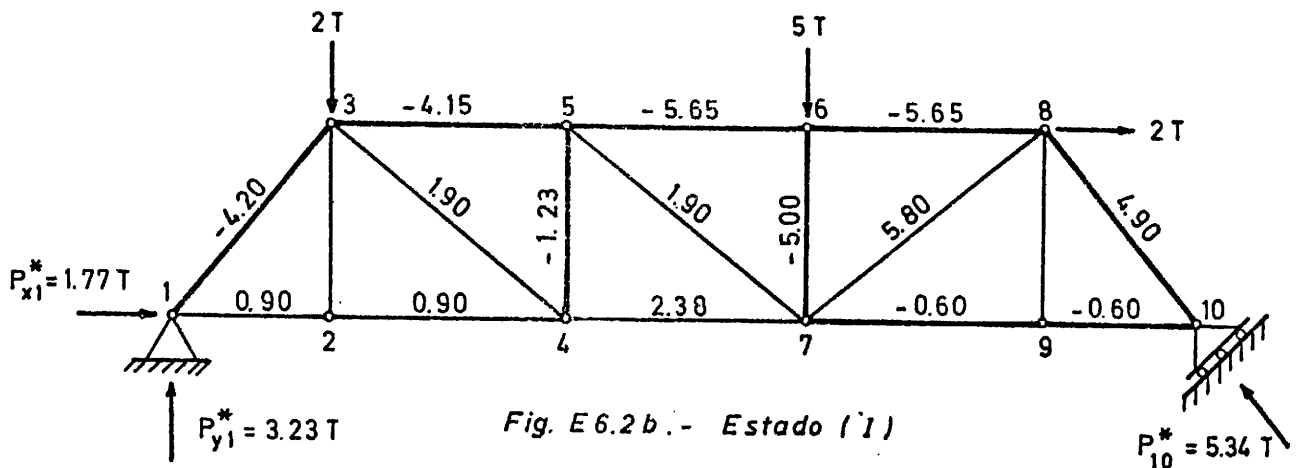


Fig. E 6.2 b.- Estado (I)

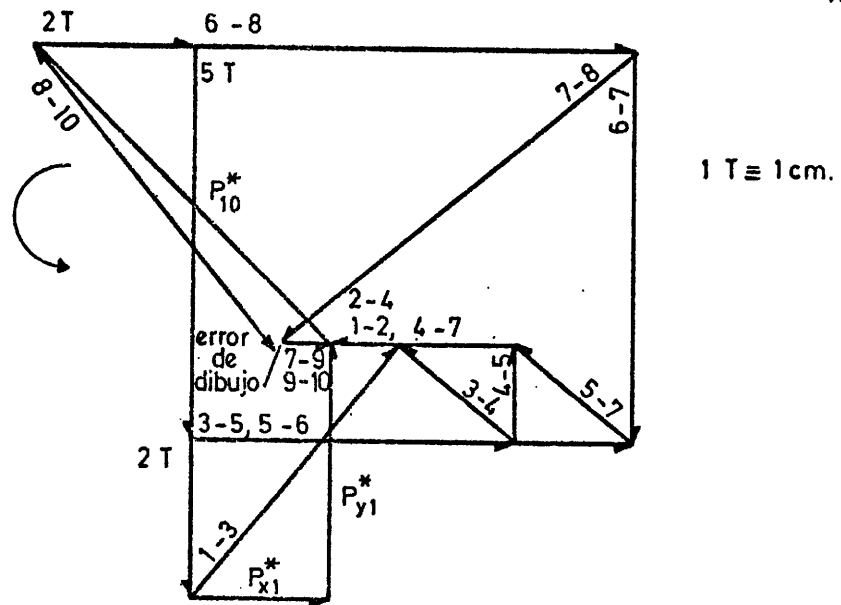


Fig. E 6.2 d.- Cremona del estado (I)

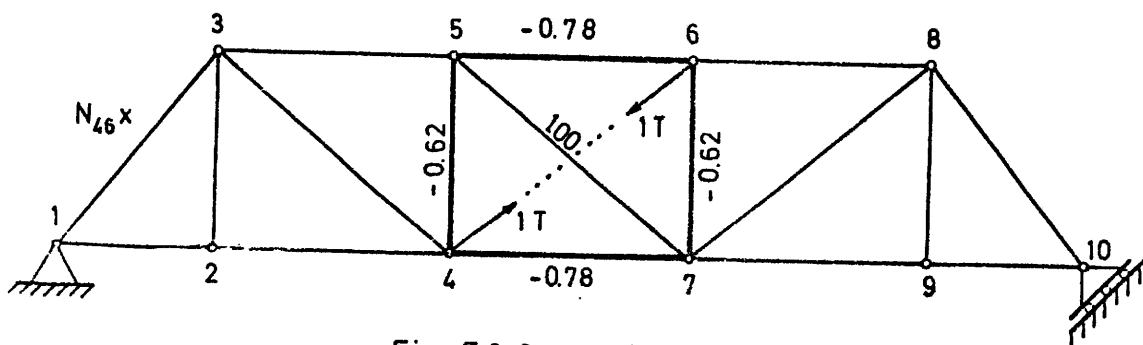


Fig. E 6.2 c.- Estado (II)

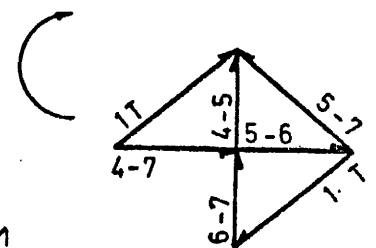


Fig. E 6.2 e
Cremona del estado (II)

El cálculo realiza descomponiendo la estructura en dos estados, ya que el grado de hiperestaticidad es 1, (figuras E6.2b y E6.2c), que se resuelven en los Cremonas de las figuras E6.2d y E6.2e.

Los resultados numéricos de los Cremonas se pueden ver en la tabla E6.2a.

El valor de N_{4-6} se halla de forma que el alargamiento sea compatible con la existencia de la barra suprimida en los estados (I) y (II). Es decir:

$$\sum_1^{17} N^I N^{II} \frac{L}{E\Omega} = -N_{4-6} \frac{L_{4-6}}{E_{4-6} \Omega_{4-6}} - N_{4-6} \sum_1^{17} (N^{II})^2 \frac{L}{E\Omega}$$

y según se ve en la tabla E6.2a:

$$N_{4-6} = - \frac{24,75}{9,4824 + 3,91} = -1,85$$

Los esfuerzos finales son:

$$N^0 = N^I + N_{4-6} N^{II}$$

y se expresan en la tabla E6.2a y en la figura E6.2f.

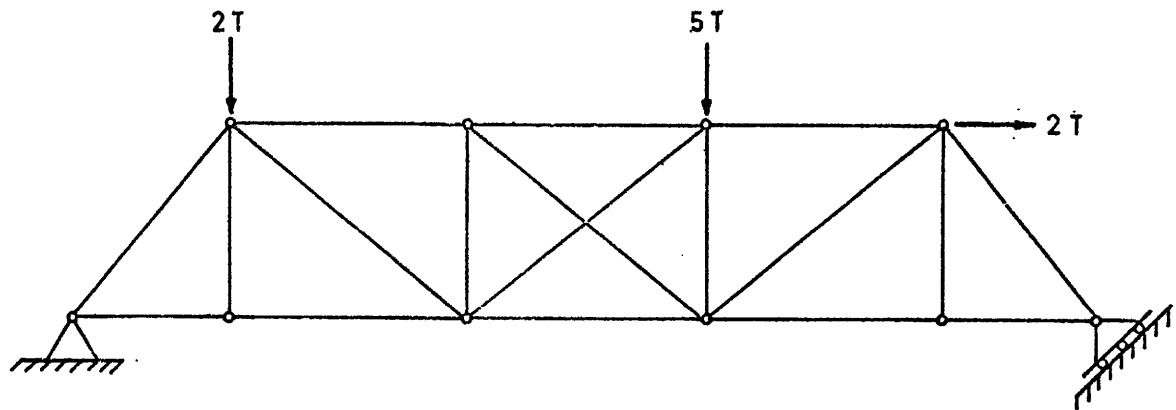


Fig. E 6.2 f.- Esfuerzos resultantes

Tabla E6.2a

Unidades	m	T	T	T	Txm	Txm	T
Factor común		10^{-4}			10^{-4}		
Barra	L	$E\Omega$	N^I	N^{II}	$N^I N^{II} \frac{L}{E\Omega}$	$(N^{II})^2 \frac{2L}{E\Omega}$	N^0
1-2	2,00		0,90	0	0	0	0,90
1-3			-4,20	0	0	0	-4,20
2-3	2,50		0	0	0	0	0
2-4	3,00		0,90	0	0	0	0,90
3-4			1,90	0	0	0	1,90
3-5	3,00		-4,15	0	0	0	-4,15
4-5	2,50	1	-1,23	-0,62	1,91	0,961	-0,08
4-7	3,00	1	2,38	-0,78	-5,57	1,825	3,82
5-6	3,00	1	-5,65	-0,78	13,24	1,825	-4,20
5-7	3,91	1	1,90	1,00	7,42	3,91	+0,05
6-7	2,50	1	-5,00	-0,62	7,75	0,961	-3,85
6-8	3,00		-5,65	0	0	0	-3,95
7-8			5,85	0	0	0	5,80
7-9	3,00		-0,60	0	0	0	-0,60
8-9	2,50		0	0	0	0	0
8-10			-4,90	0	0	0	-4,90
9-10	2,00		-0,60	0	0	0	-0,60
Σ					24,75	9,4824	
4-6							-1.85

Ejercicio E6.3

Calcular los esfuerzos en las barras de la estructura de la figura E6.3a, sometida a las fuerzas indicadas y a un aumento de temperatura de 30°C . en la barra 2-5.

Sección de las barras: 20 cm^2 .
Módulo de Elasticidad: $2 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.
Coeficiente de dilatación térmica: $10^{-5}/^{\circ}\text{C}$.

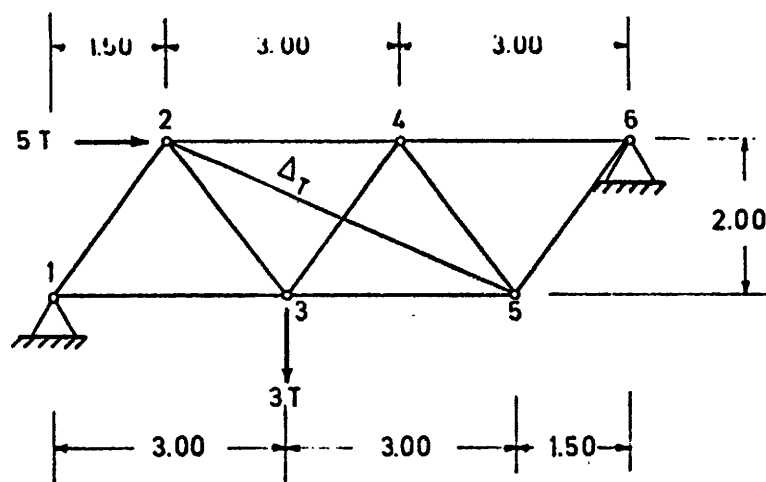


Fig. E6.3a

La estructura se resuelve a través de los estados (I), (II) y (III) que se representan en las figuras E6.3b, E6.3d y E6.3f.

Los esfuerzos en las barras se hallan en los Cremonas de las figuras E6.3c, E6.3e y E6.3g.

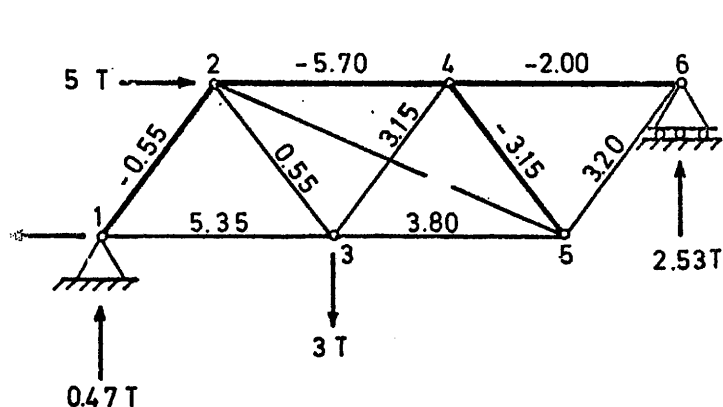


Fig. E6.3b.- Estado (I)

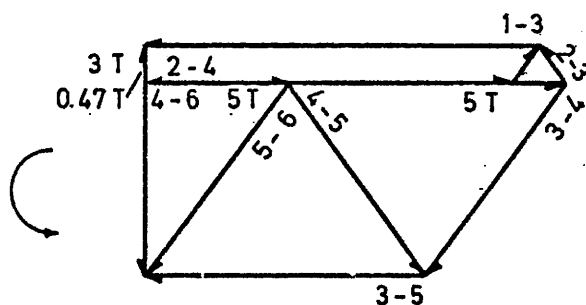


Fig. E6.3c.- Cremona del estado (I)

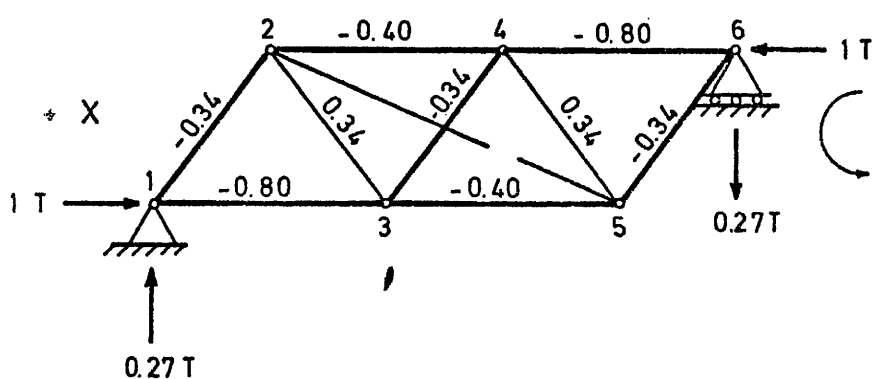


Fig. E6.3d.- Estado (II)

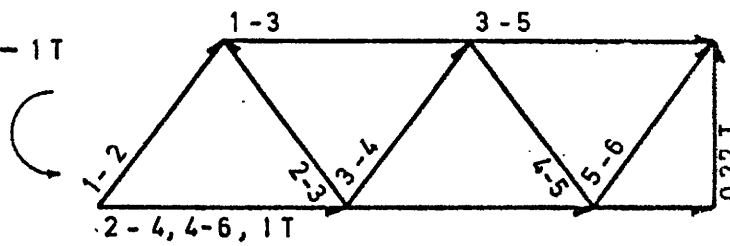


Fig. E6.3e.- Cremona del estado (II)

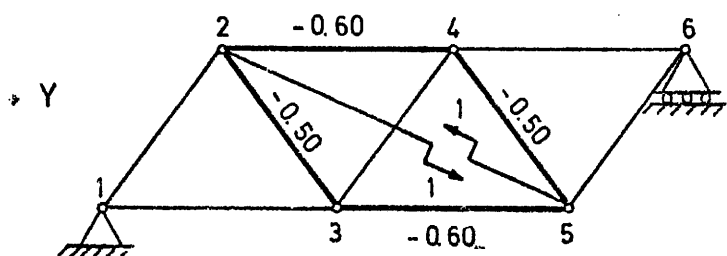


Fig. E6.3f.- Estado (III)

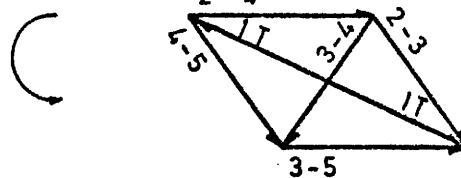


Fig. E6.3g.- Cremona del estado (III)

El resultado numérico de los esfuerzos se expresa en la Tabla E6.3a.

Obligando a que el nudo 6 no se mueva y la barra 2-5 no tenga discontinuidad en el corte ficticio, se tiene:

$$\sum_1^{10} N^{II} \Delta_I = X \sum_1^{10} N^{II^2} \frac{L}{E\Omega} + Y \sum_1^{10} N^{II} N^{III} \frac{L}{E\Omega} = 0$$

$$\sum_1^{10} N^{III} \Delta_I + X \sum_1^{10} N^{II} N^{III} \frac{L}{E\Omega} + Y \sum_1^{10} N^{III^2} \frac{L}{E\Omega} = 0$$

a partir de los resultados de la tabla E6.3a se deduce:

$$-3,22508 + 1,56125 X + 0,04125 Y = 0 \quad X = 2,2727$$

$$17,5018 + 0,04125 X + 2,24625 Y = 0 \quad Y = -7,8333$$

Los esfuerzos finales son $N^I + X N^{II} + Y N^{III}$ (tabla E6.3a y figura E6.3h).

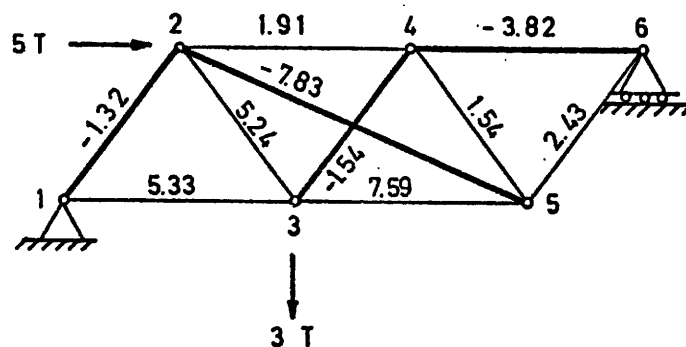


Fig. E6.3h.- Esfuerzos finales

Unidades	m	m/T	T	m	m	m	T	T	Txm	Txm	Txm	Txm	Txm			
Factor		$\times 10^{-4}$		$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$			$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$			
Barra	L	L/E Ω	N ^I	Δ	Δ_r	Δ_I	N ^{II}	N ^{III}	N ^{II} Δ_0	N ^{III} Δ_0	N ^{II} L/E Ω	$\frac{N^{II}N^{III}L}{E\Omega}$	(N ^{III}) ² L/E Ω	X N ^{II}	Y · N ^{III}	$\frac{N^I + XN^{II} + YN^{III}}{N \text{ TOTAL}}$
1-2	2,50	0,625	-0,55	-0,3437	0	-0,3437	-0,34	0	0,11686	0	0,07225	0	0	-0,7727	0	-1,3227
1-3	3,00	0,75	+5,35	4,0125	0	4,0125	-0,80	0	-3,21	0	0,48	0	0	-1,8182	0	+3,5318
2-3	2,50	0,625	+0,55	0,3437	0	0,3437	+0,34	-0,50	0,11686	-0,1718	0,07225	-0,10625	0,15625	0,7727	3,9166	+5,2394
2-4	3,00	0,75	-5,70	-4,275	0	-4,275	-0,40	-0,60	1,71	2,565	0,12	0,18	0,27	-0,9091	4,70	-1,9091
2-5	4,95	1,2375	0	0	14,85	14,85	0	+1,00	0	14,85	0	0	1,2375	0	-7,83	-7,833
3-4	2,50	0,625	+3,15	1,9687	0	1,9687	-0,34	+0,50	-0,6694	0,9843	0,07225	-0,10625	0,15625	-0,7727	-3,9166	-1,5394
3-5	3,00	0,75	+3,80	2,85	0	2,85	-0,40	-0,60	-1,14	-1,71	0,12	0,18	0,27	-0,9091	-4,70	+7,5909
4-5	2,50	0,625	-3,15	-1,9687	0	-1,9687	+0,34	-0,50	-0,6694	0,9843	0,07225	-0,10625	0,15625	0,7727	-3,9166	+1,5394
4-6	3,00	0,75	-2,00	-1,5	0	1,5	-0,80	0	1,2	0	0,48	0	0	-1,8182	0	-3,8182
5-6	2,50	0,625	+3,20	2,00	0	2,00	-0,34	0	-0,68	0	0,07225	0	0	-0,7727	0	+2,4273
Σ									-3,22508	17,5018	1,56125	0,04125	2,24625			

Tabla E6.3a.

Ejercicio E6.4.

En la estructura articulada indicada en la figura E6.4a, hallar el acortamiento o el alargamiento que hay que introducir en el tensor situado en la barra 3-8, para que, con el estado de cargas indicado, aparezca una reacción vertical en el nudo 9 de 7 toneladas.

Para todas las barras: $\frac{L}{E\Omega} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m/T.}$

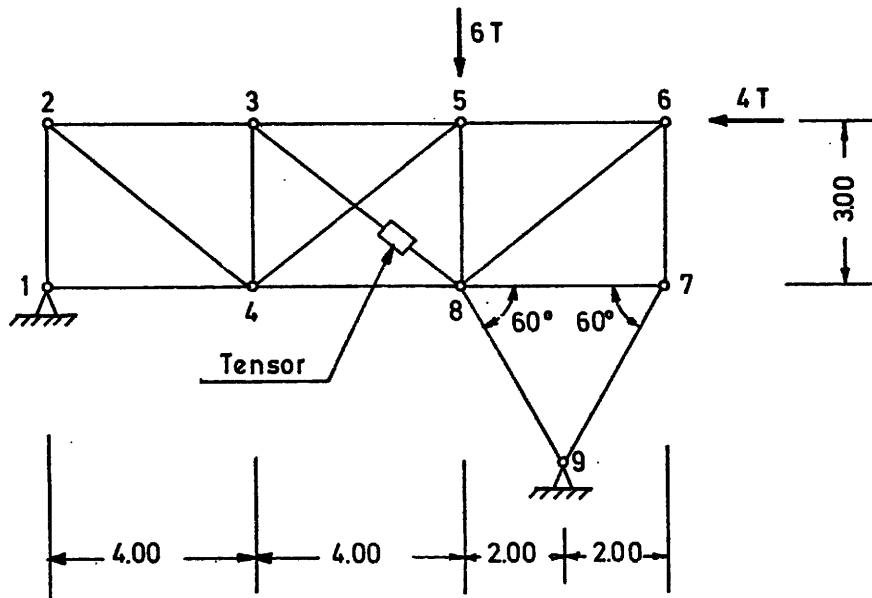


Fig.E 6.4a

El estado real es la suma de los de la figura

E6.4b:

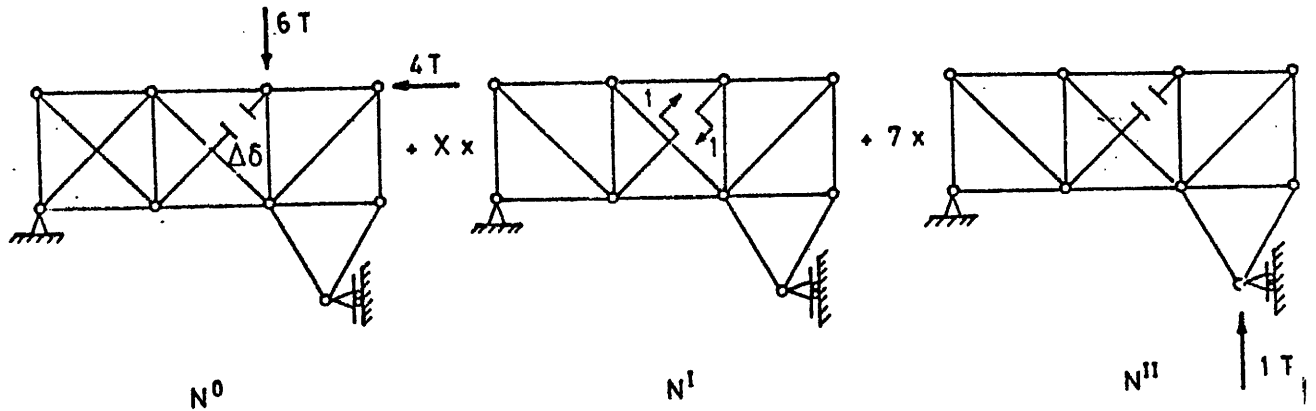


Fig. E 6.4 b

Las condiciones a imponer son:

$$\sum_{i=1}^{NB} \{N_i^0 + X N_i^I + 7 \cdot N_i^{II}\} \frac{1}{E\Omega} + \Delta_i \} N_i^I = 0$$

$$\sum_{i=1}^{NB} \{N_i^0 + X N_i^I + 7 \cdot N_i^{II}\} \frac{1}{E\Omega} + \Delta_i \} N_i^{II} = 0$$

que se reducen a:

$$\sum_{i=1}^{NB} \{N_i^0 \frac{1}{E\Omega} + \Delta_i \} N_i^I + X \sum_{i=1}^{NB} (N_i^I)^2 \frac{1}{E\Omega} + 7 \sum_{i=1}^{NB} N_i^I N_i^{II} \frac{1}{E\Omega} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{NB} \{N_i^0 \frac{1}{E\Omega} + \Delta_i \} N_i^{II} + X \sum_{i=1}^{NB} N_i^I N_i^{II} \frac{1}{E\Omega} + 7 \sum_{i=1}^{NB} (N_i^{II})^2 \frac{1}{E\Omega} = 0$$

$$\frac{1}{E\Omega} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{t}} \quad (\text{para todas las barras}).$$

Sustituyendo los distintos valores:

$$\begin{aligned} 36,8 + \delta + 8X - 14,7 &= 0 & 8X + \delta &= -22,1 \\ -706,54 - 1,67\delta - 2,1X + 1155,91 &= 0 & 2,1X + 1,67\delta &= 449,37 \end{aligned}$$

$$X = -43,19 \qquad \delta = 232,4$$

Por lo tanto:

$$\Delta_{3-8} = 323,4 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 323,4 \cdot 10^{-1} \text{ mm} = 3,23 \text{ cm}.$$

$$\Delta_{3-8} = 3,23 \text{ cm}.$$

Los cálculos se han realizado de acuerdo con la figura E6.4c y la tabla E6.4a.

TABLA E6.4a.

	$\times 10^{-4}$		$(1) \times 10^{-4}$	(2)	(3)	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$	
BARRA	Δ_i	N°	$N^0 / E\Omega + \Delta_i$	N^I	N^{II}	$(1) \times (2)$	$(1) \times (3)$	$(N^I)^2 l / E\Omega$	$N^I N^{II} l / E\Omega$	$(N^{II})^2 l / E\Omega$	$N^F = N^0 \times N^I + 7N^{II}$
1-2	0	-6	-12	0	1	0	-12	0	0	2	1
1-4	0	6,4	12,8	0	-2,9	0	-37,12	0	0	16,82	-13,9
2-3	0	-8	-16	0	1,3	0	-20,8	0	0	3,38	1,1
2-4	0	10	20	0	-1,67	0	-33,4	0	0	5,58	-1,69
3-4	0	-6	-12	-0,6	1	7,2	-12	0,72	-1,2	2	16,91
3-5	0	-16	-32	-0,8	2,67	25,6	-85,44	1,28	-4,272	14,26	37,24
3-8	δ	10	$20+\delta$	1	-1,67	$20+\delta$	$-33,4-1,67\delta$	2	-3,34	5,58	-44,88
4-5	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	-43,19
4-8	0	14,5	29	-0,8	-4,2	-23,2	-121,8	1,28	6,72	35,28	19,65
5-6	0	-16	-32	0	2,67	0	-85,44	0	0	14,26	2,69
5-8	0	-6	-12	-0,6	9	7,2	0	0,72	0	0	19,91
6-7	0	-9	-18	0	1,95	0	-35,1	0	0	7,61	4,65
6-8	0	15	30	0	-3,3	0	-99	0	0	21,78	-8,1
7-8	0	5,2	10,4	0	-1,2	0	-12,48	0	0	2,88	-3,2
7-9	0	-10,4	-20,8	0	2,3	0	-47,84	0	0	10,58	5,7
8-9	0	10,4	20,8	0	-3,4	0	-70,72	0	0	23,12	-13,4
Σ						$36,8+\delta$	$-706,54$ $-1,67\delta$	8	-2,1	165,13	

Ejercicio E7.1

En la estructura de la figura E7.1a, calcular el -
corrimiento horizontal del nudo 5 y el giro entre las barras
4-5 y 2-4.

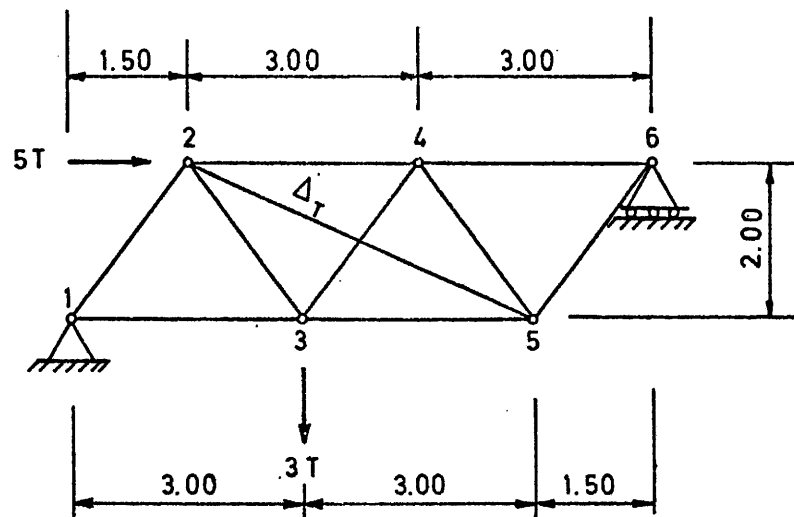


Fig. E7.1a

Los estados auxiliares que se consideran para el cálculo del corrimiento horizontal del nudo 5 y giro relativo entre las barras 4-5 y 2-4 (estados I y II respectivamente) corresponden a las estructuras isostáticas básicas de la figura E7.1b).

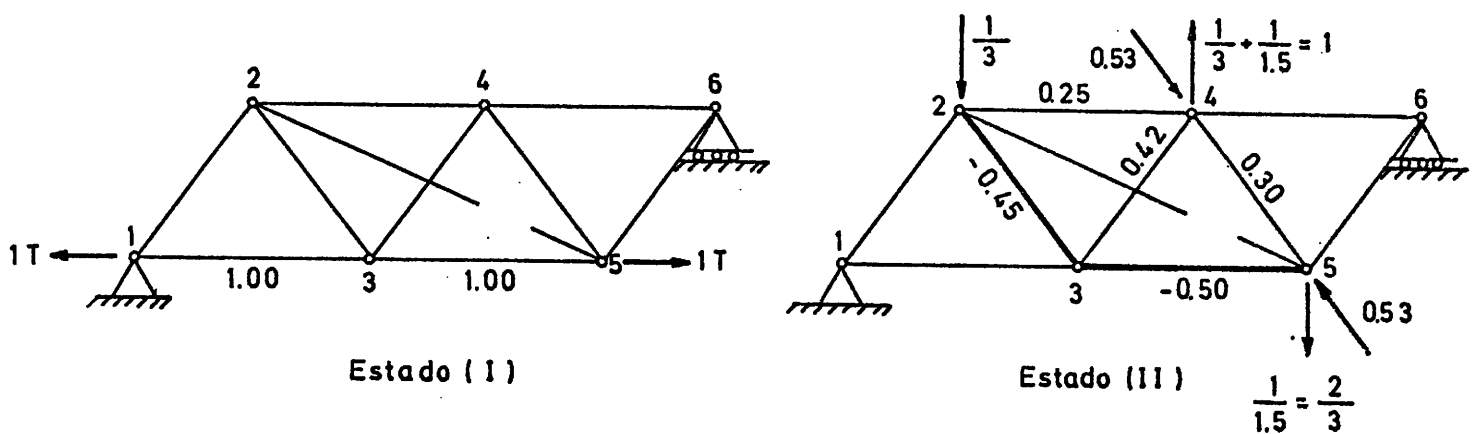


Fig. E7.1b.- Estados auxiliares considerados

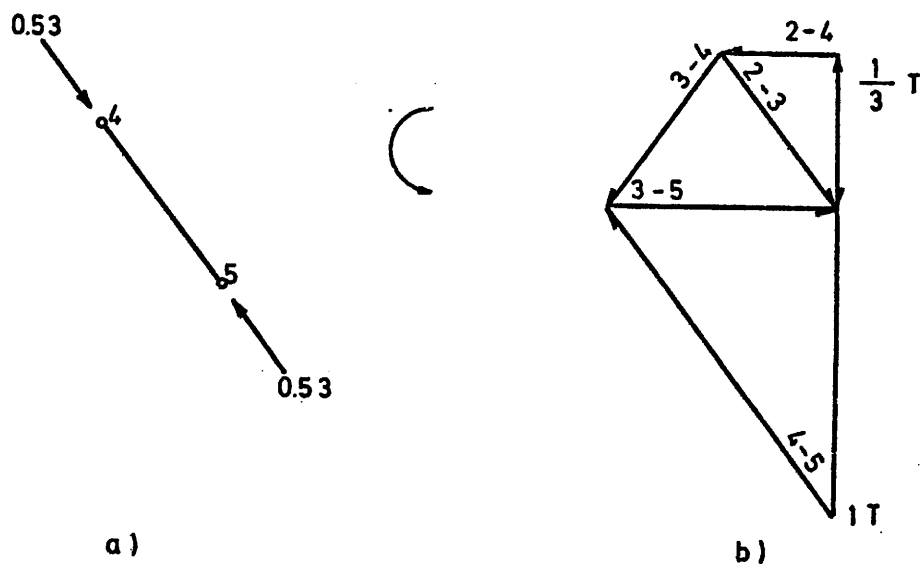


Fig. E7.1c.- Cremona del estado (II) descompuesto en la compresión de 0.537 de la barra 4-5 (a) y el resto de las cargas (b)

Considerando los resultados del ejercicio E6.3 se tiene:

$$d_{x5} = \sum_1^{11} \Delta_R N^I; \text{ ángulo } \psi \text{ entre 2-4 y 4-5} = \sum_1^{11} \Delta_R N^{II}$$

TABLA E7.1a.

Factor	10^{-4}		10^{-4}			10^{-4}	10^{-4}
Barra	L/EΩ	N _{TOTAL}	Δ_R	N ^I	N ^{II}	$\Delta_R N^I$	$\Delta_R N^{II}$
1-2					0	0	0
1-3	0,75	+3,5318	+2,6488	+1	0	+2,6488	0
2-3	0,625	+5,2394	+3,2746	0	-0,4167	0	-1,3645
2-4	0,75	-1,9091	-1,4318	0	+0,25	0	-0,3579
2-5				0	0	0	0
3-4	0,625	-1,5394	-0,9621	0	+0,4167	0	-0,4010
3-5	0,75	+7,5909	+5,6932	+1	-0,5	+5,6932	-2,8466
4-5	0,625	+1,5394	+0,9621	0	+0,83-0,53=+0,3	0	+0,2886
4-6				0	0	0	0
5-6				0	0	0	0
Σ						8,342	-4,68

Así pues resulta de la tabla E7.1a.

El nudo 5 sufre un corrimiento horizontal hacia la derecha de 0,834 mm.

Las barras 2-4 y 4-5 se separan un ángulo de $4,68 \cdot 10^{-4}$ radianes.

Ejercicio E7.2

En la estructura de nudos articulados de la figura E7.2a se pide:

- 1) Esfuerzos en todas las barras.
- 2) Desplazamiento vertical del nudo 6 en cm.

Todas las barras son de acero de módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-2}$ y una sección transversal de 10 cm^2 .

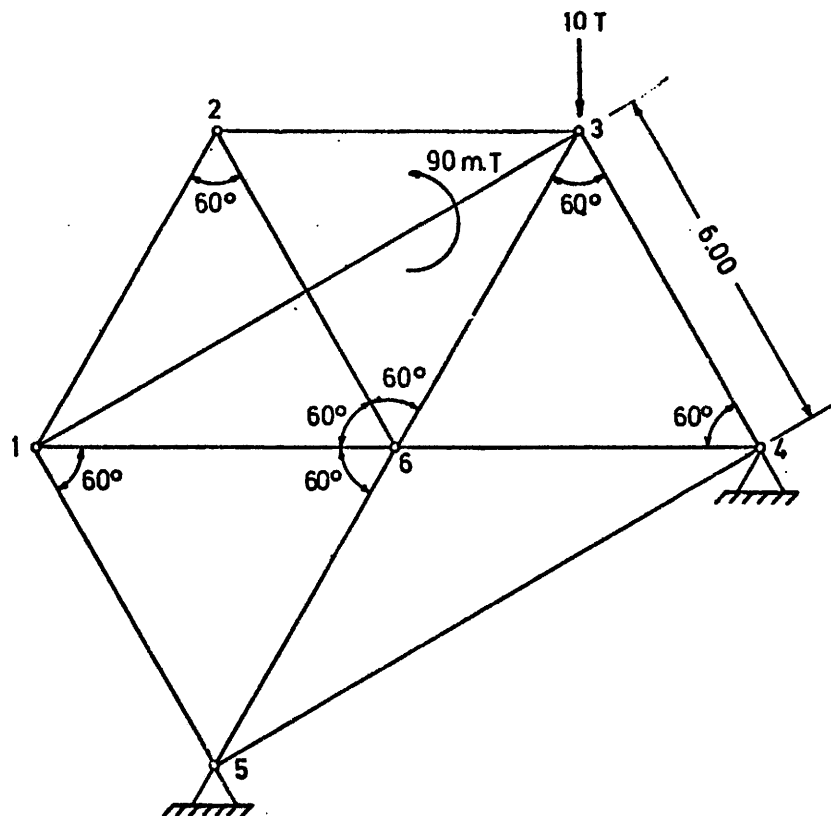


Fig. E 7.2 a

1) El estado real {estado (0)} se resuelve a partir de los estados auxiliares I, II y III representados en la figura E7.2b.

La resolución gráfica aparece representada en los Cremonas de las figuras E7.2c, E7.2d y E7.2e.

Si se obliga a que los puntos 1 y 3 tengan una separación relativa compatible con el alargamiento de la barra 1-3, y que el nudo 4 no se mueva, se tiene:

$$\Sigma \frac{N^I N^{II}}{E\Omega} L + N_{13} \Sigma \frac{(N^{II})^2 L}{E\Omega} + P_{x4}^* \Sigma \frac{N^{II} N^{III}}{E\Omega} L = - \frac{N_{13} L_{13}}{E_{13} \Omega_{13}}$$

$$\Sigma \frac{N^I N^{II}}{E\Omega} L + N_{13} \Sigma \frac{N^{II} N^{III}}{E\Omega} + P_{x4}^* \Sigma \frac{(N^{III})^2 L}{E\Omega} = 0$$

A partir de los resultados numéricos de la Tabla E7.2a resulta:

$$3,3466 + 1,6820 \cdot N_{13} - 0,3364 P_{x4}^* = - 3 \cdot N_{13}$$

$$6,6355 - 0,3364 \cdot N_{13} + 4,9998 P_{x4}^* = 0$$

$$\begin{cases} 3,4140 N_{13} - 0,3364 P_{x4}^* = - 3,3466 \\ -0,3364 N_{13} + 4,9998 P_{x4}^* = - 6,6355 \end{cases} \begin{cases} N_{13} = - 1,12 \text{ T} \\ P_{x4}^* = - 1,40 \text{ T} \end{cases}$$

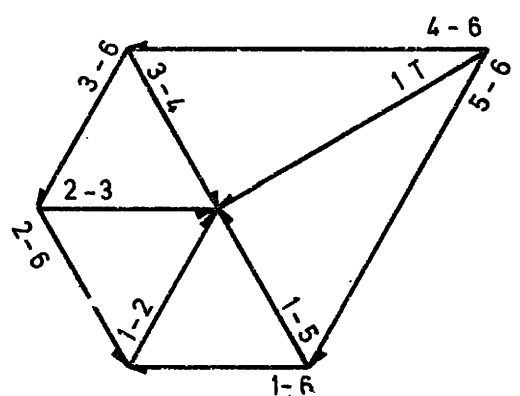
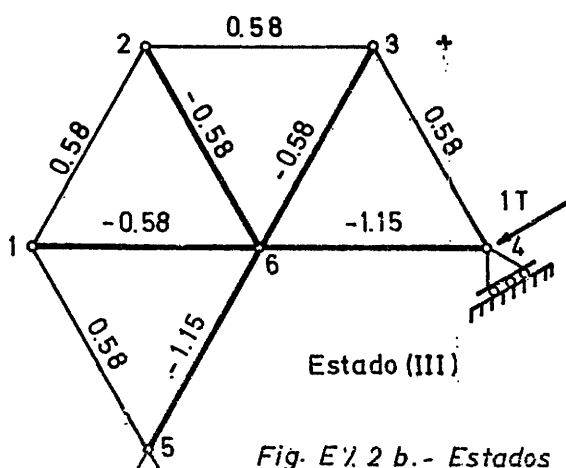
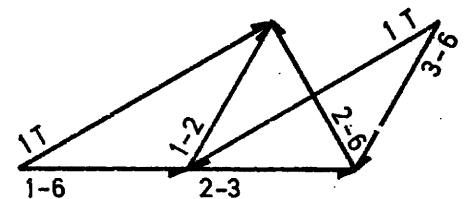
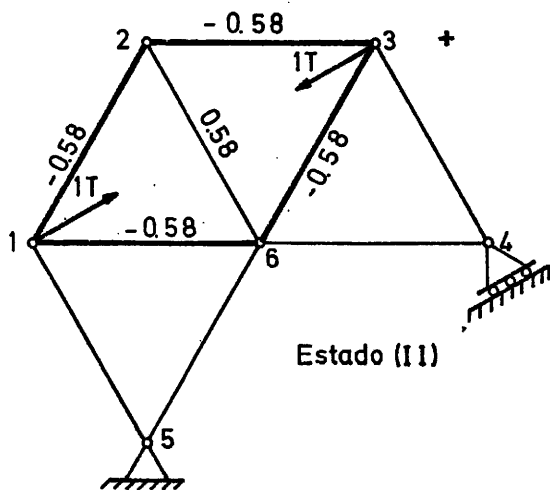
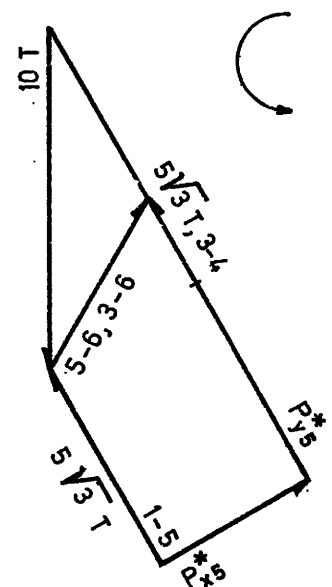
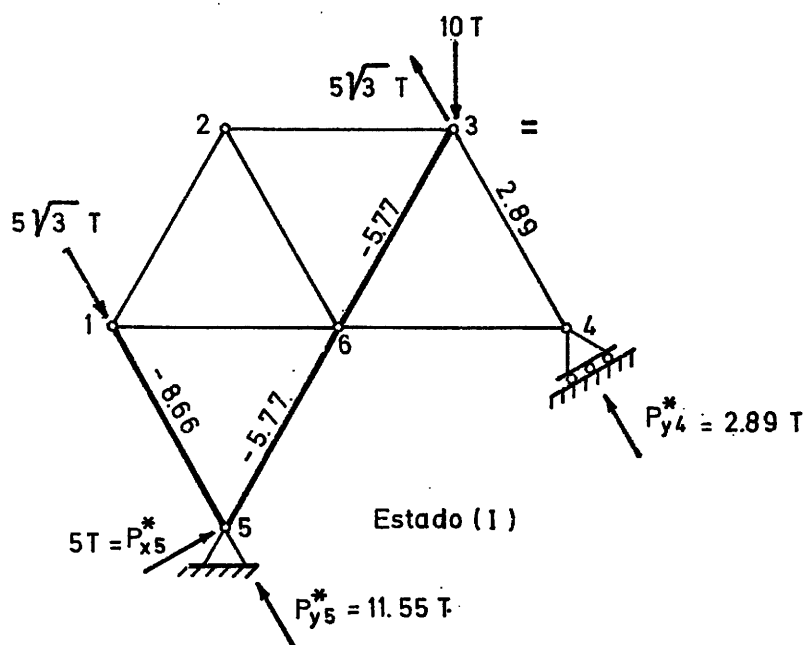
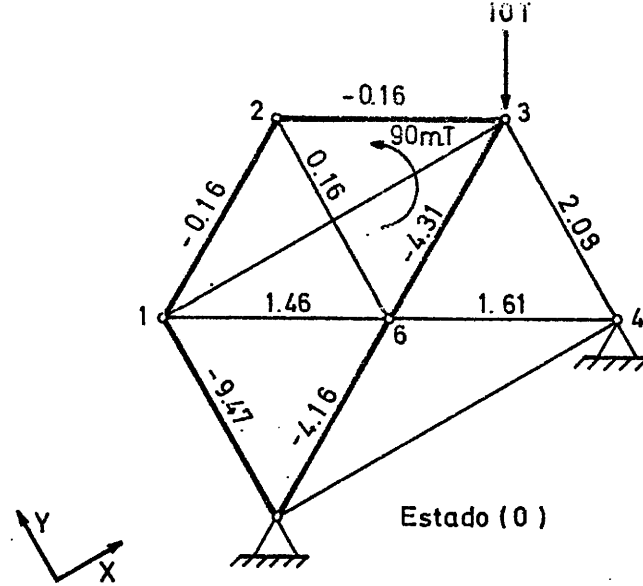


Fig. E7.2 b. - Estados de cálculo

Fig. E7.2 e. - Cremona del estado (III)

y los esfuerzos finales serán:

$$N^{\circ} = N^I - 1,12 N^{II} - 1,40 N^{III} \quad (\text{tabla E7.2})$$

2) El estado auxiliar (estado IV) se indica en la figura E7.2f, y los esfuerzos se obtienen gráficamente por el método de Cremona (figura E7.2g).

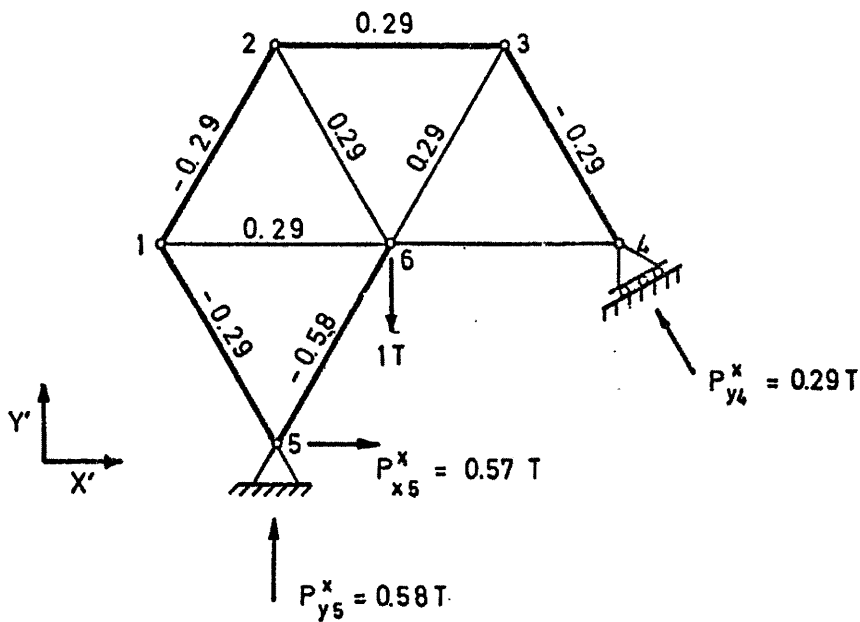


Fig. E7.2 f.- Estado (IV)

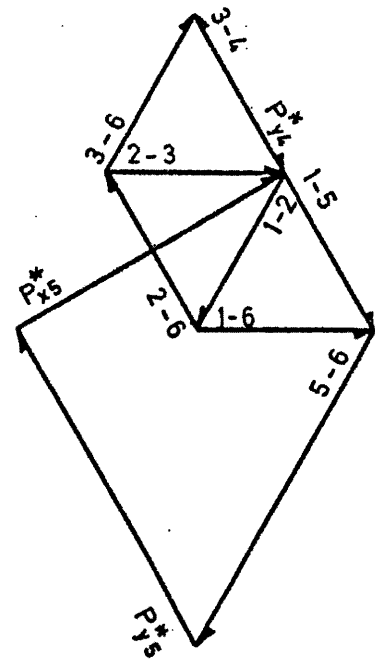


Fig. E7.2g.- Cremona del estado (IV)

Obligando a que el trabajo producido por el estado (IV) con los desplazamientos y deformaciones del estado (0) sea nulo se tiene:

$$1 \, d_{y,6} = \sum_1^{10} \frac{N^{\circ} N^{IV}}{E\Omega} L$$

y considerando los resultados de la tabla E7.2 resulta finalmente:

$$d_{y,6} = \frac{6,00}{2 \cdot 10^7 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} 3,8686 = 11,61 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 1,161 \text{ mm}$$

Tabla E7.2a

Barra	L	N^I	N^{II}	N^{III}	$N^I N^{III}$	$N^I N^{III}$	$(N^{II})^2$	$(N^{III})^2$	$N^{II} N^{III}$	N°	N^{IV}	$N^\circ N^{IV}$
1-2	6,00	0	-0,58	0,58	0		0,3364	0,3364	-0,3364	-0,16	-0,29	0,0464
1-5	6,00	-8,66	0	0,58	0	-5,0228	0	0,3364	0	-9,47	-0,29	2,7463
1-6	6,00	0	-0,58	-0,58	0		0,3364	0,3364	0,3364	1,46	0,29	0,4234
2-3	6,00	0	-0,58	0,58	0		0,3364	0,3364	-0,3364	-0,16	-0,29	0,0464
2-6	6,00	0	+0,58	-0,58	0		0,3364	0,3364	-0,3364	0,16	0,29	0,0464
3-4	6,00	2,89	0	0,58	0	1,6762	0	0,3364	0	2,08	-0,29	-0,6032
3-6	6,00	-5,77	-0,58	-0,58	3,3466	3,3466	0,3364	0,3364	0,3364	-4,31	0,29	-1,2479
4-6	6,00	0	0	1,15	0		0	1,3225	0	1,61	0	0
5-6	6,00	-5,77	0	1,15	0	6,6355	0	1,3225	0	-4,16	-0,58	2,4128
Σ					3,3466	6,6355	1,6820	4,9998	-0,3364			3,8686

Ejercicio E7.3

En la estructura de la figura E7.3a, la pieza 2-6 es de hormigón y está formada por dos arcos de círculo de centros 6 y 2 respectivamente. Su sección es de $0,20 \text{ m}^2$ y su inercia I , es tal que $\frac{E\Omega P^2}{EI} = 100 \text{ N}$ ($\text{N} = \text{N}^\circ \text{ alumno}$). Las restantes barras son metálicas con una sección de 10 cm^2 .

Módulo de elasticidad del hormigón = 300.000 kg/cm^2 .

Módulo de elasticidad del acero = $2.000.000 \text{ kg/cm}^2$.

Las acciones son una carga $P = 80 \text{ t}$ y un alargamiento de $3,00 \text{ cm}$ en la barra 4-6.

Se pide:

- Leyes de esfuerzos en todas las barras.
- Desplazamiento vertical del nudo 5.

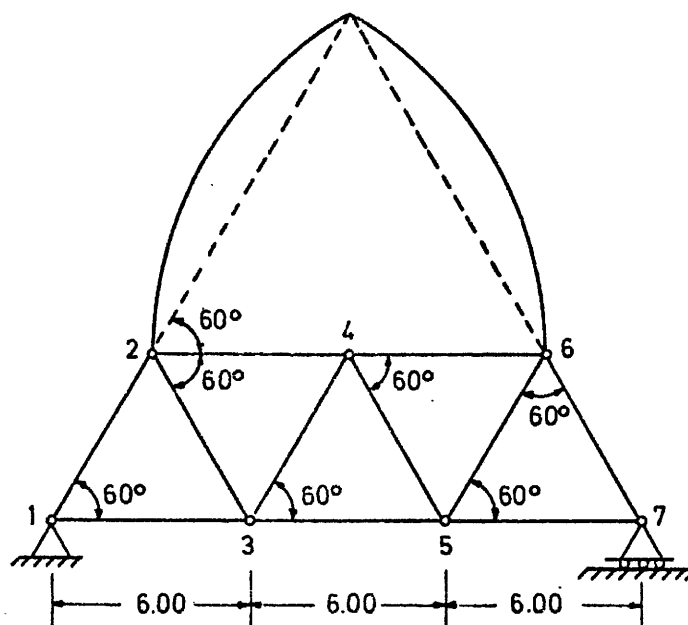


Fig. E7. 3a

a) Leyes de esfuerzos en todas las barras

Se consideran las dos subestructuras estados (0) de las figuras E7.3b y E7.3c y se elige H como incógnita hiperestática. Se suponen también los estados auxiliares I y II indicados en las citadas figuras.

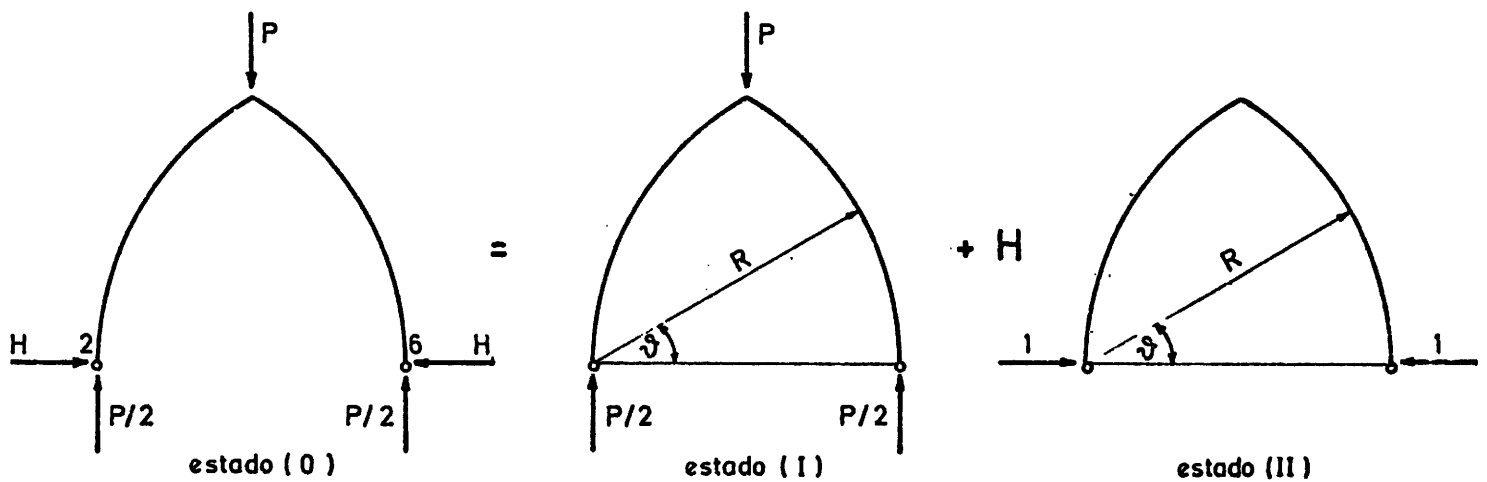


Fig. E7.3 b.- Subestructura I

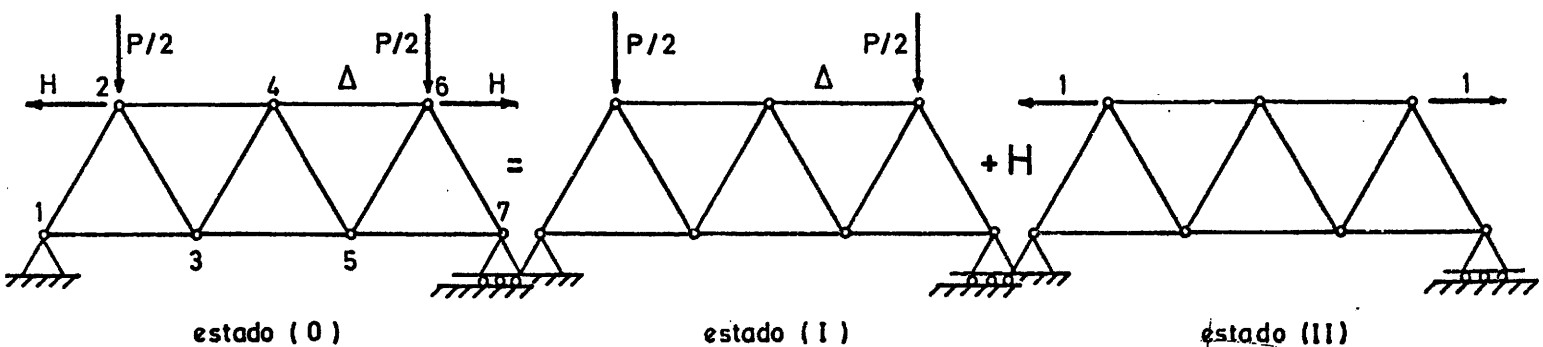


Fig. E7.3 c.- Subestructura II

La condición de compatibilidad es que el desplazamiento relativo entre los nudos 2 y 6 en la subestructura I sea igual al desplazamiento relativo entre los nudos 2 y 6 - de la subestructura II, es decir:

$$\Delta^I - \Delta^{II} H = \sum_1^{11} \left[(N^I + H N^{II}) \frac{L}{E\Omega} + \varepsilon \right] N^{II}$$

donde:

ε es el alargamiento dispuesto de las barras.

Δ^I es la separación entre los nudos 2 y 6 del estado (I) de la figura E7.3b:

$$N^I = -\frac{P}{2} \cos\theta ; \quad M^I = \frac{P}{2} R(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{1}{2} \Delta^I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\frac{P}{2} \cos\theta \cos\theta \frac{R}{E\Omega} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{P}{2} R^2 \sin\theta (1 - \cos\theta) \frac{Rd}{EI}$$

$$\Delta^I = \frac{PR}{E\Omega} \left\{ -\frac{3}{8} + 100 N \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \right) \right\} = \frac{PR}{8E\Omega} (-3 + 100 N)$$

Δ^{II} es el acercamiento entre los nudos 2 y 6 del estado (II) de la figura E7.3c:

$$N^{II} = -\sin\theta ; \quad M^{II} = -\sin\theta$$

$$\frac{1}{2} \Delta^{II} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta \frac{R}{E\Omega} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} R^2 \sin^2\theta \frac{R}{EI} d\theta$$

$$\Delta^{II} = \left(\frac{R}{E\Omega} + \frac{R^3}{EI} \right) \left(\frac{\pi}{3} - \frac{3}{4} \right) = \frac{R}{E\Omega} (1 + 100 N) \left(\frac{\pi}{3} - \frac{3}{4} \right)$$

$$\Delta^{II} = 1,2284 \cdot 10^{-5} (1 + 100 N)$$

Los esfuerzos N^I y N^{II} de los estados (I) y (II) de la figura E7.3c se expresan en la Tabla E7.3.

Tabla E7.3

Factor	10^{-4}				10^{-4}	10^{-4}				10^{-4}
Barra	$L/E\Omega$	N^I	N^{II}	ϵ	$N^I N^{II} \frac{L}{E\Omega}$	$(N^{II})^2 \frac{L}{E\Omega}$	ϵN^I	$N^0 = N^I + H N^{II}$	N^{III}	$N^0 N^{III} \frac{L}{E\Omega}$
1-2	3	-46,19	0	0	0	0	0	-46,19	-0,385	53,35
1-3	3	23,09	0	0	0	0	0	23,09	0,192	13,30
2-3	3	0	0	0	0	0	0	0	0,385	0
2-4	3	-23,09	1	0	-69,27	3	0	-7,23	-0,385	8,35
3-4	3	0	0	0	0	0	0	0	-0,385	0
3-5	3	23,09	0	0	0	0	0	23,09	0,577	39,97
4-5	3	0	0	0	0	0	0	0	0,577	0
4-6	3	-23,09	1	3	-69,27	3	300	-7,23	-0,770	16,70
5-6	3	0	0	0	0	0	0	0	0,770	0
5-7	3	23,09	0	0	0	0	0	23,09	0,385	26,67
6-7	3	-46,19	0	0	0	0	0	-46,19	-0,770	106,70
					-138,54	6	300			265

Obligando a la compatibilidad según los resultados de la tabla anterior se tiene que:

$$-138,54 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-4} H + 300 \cdot 10^{-4} = 2(100 N - 3) \cdot 10^{-4} -$$

$$- 0,1228 \cdot 10^{-4} \cdot (100 N + 1)H$$

$$H = \frac{2(100 N - 3) + 138,54 - 300}{0,1228 (100 N + 1) + 6} = \frac{200 N - 167,46}{12,28 N + 6,1228}$$

Si se toma $N = 50$ resulta $H = 15,86$

Los esfuerzos finales vienen dados por:

$$N^0 = N^I + HN^{II}$$

y se expresan en la misma tabla E7.3.

Los resultados correspondientes a la barra curva se indican en la figura E7.3d.

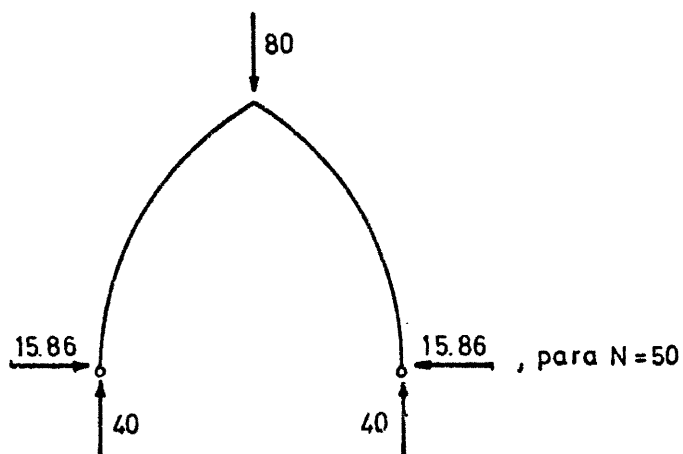


Fig. E7.3d.- Esfuerzos finales en la barra curva

b) Desplazamiento vertical del nudo 5

Se considera el estado (III) de la figura E7.3e,
cuyos esfuerzos se pueden ver en la Tabla E7.3.

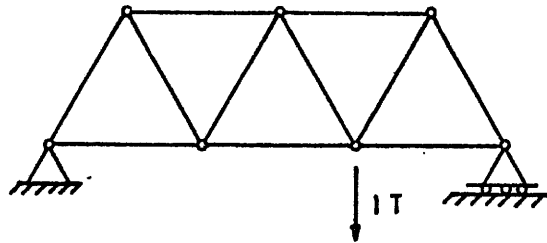


Fig. E7.3 e .- Estado (III)

Se tiene entonces que:

$$d_{y5} = \sum_1^{11} \{ (N^I + HN^{II}) \frac{L}{E\Omega} + \epsilon \} N^{II} = \sum_1^{11} \{ N^0 \frac{L}{E\Omega} + \epsilon \} N^{II}$$

$$d_{y5} = 265 \cdot 10^{-4} - 231 \cdot 10^{-4} = 34 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,34 \text{ cm}; \quad d_{y5} = 0,34 \text{ cm}$$

Ejercicio E7.4

En la estructura de la figura E7.4a, las barras rectas tienen las siguientes características:

$$L = 3,00 \text{ m}; \quad \Omega = 70 \text{ cm}^2; \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

Las barras curvas son de hormigón con un módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ y su sección es de $0,30 \cdot 0,30 \text{ m}$.

Se pide:

- a) Acercamiento relativo entre los nudos 2 y 5.
- b) Esfuerzos en todas las barras rectas.
- c) Ley de esfuerzos en las barras curvas.

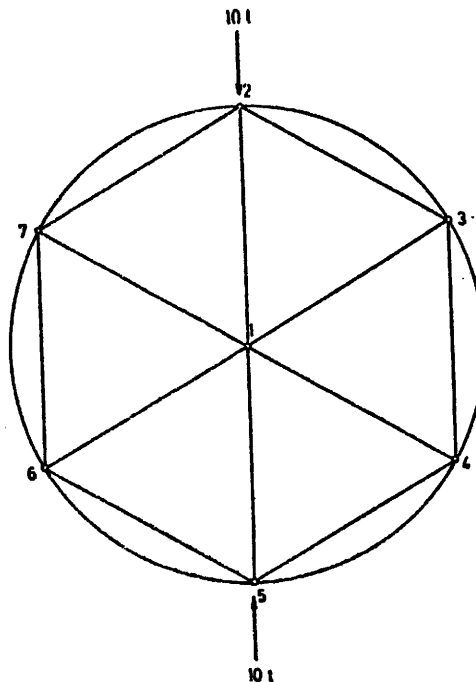


Fig. E7.4 a

Para la resolución de este problema se asimilará cada par de barras recta y curva del contorno, a una barra recta ideal con una elongabilidad equivalente a la del conjunto.

Sean: f_c la elongabilidad de la barra curva
 f_r la elongabilidad de la barra recta
 f_t la elongabilidad del conjunto barra recta y curva

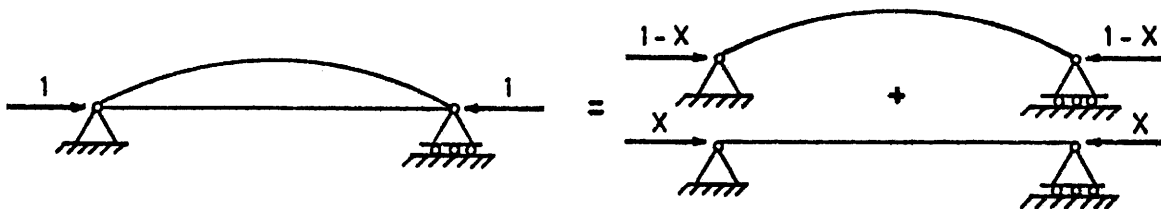


Fig. E 7.4 b

Se supone un estado de cargas en el conjunto barra recta curva (figura E7.4b). Se descompone ese estado en los dos que se indican en la misma figura y se obliga a que el acortamiento de ambas barras sea igual al del conjunto. De esta forma se tiene:

$$(1 - x)f_c = x \cdot f_r = 1 \cdot f_t$$

De la primera ecuación resulta: $x = \frac{f_c}{f_c + f_r}$;
 de la segunda: $f_t = \frac{f_c \cdot f_r}{f_c + f_r}$.

Las elongabilidades f_c , f_r y f_t se obtienen como sigue:

$$f_r = \frac{L_r}{E_r \Omega_r} = \frac{3}{2 \cdot 10^7 \cdot 70 \cdot 10^{-4}} = 0,214 \cdot 10^{-4} \text{ m/t}$$

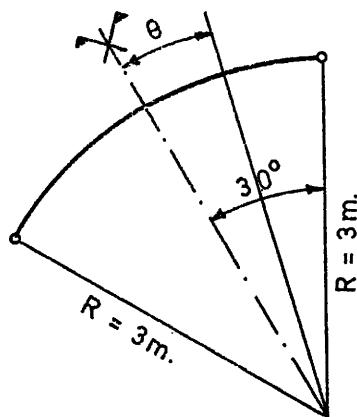


Fig. E7.4 c

Teniendo en cuenta la figura E7.4c se obtiene:

$$f_c = \frac{R^3}{EI} (\theta - 3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 2 \cdot \cos^2 \theta) + \frac{R}{E\Omega} (\theta + \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta)$$

$$R = 3 \text{ m}; \quad \Omega = 0,09 \text{ m}^2; \quad E = 1 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$I = \frac{1}{12} 0,3 \cdot 0,3^3 = 6,75 \cdot 10^{-4}$$

$$f_c = \frac{27}{2 \cdot 10^6 \cdot 6,75 \cdot 10^{-4}} \left(\frac{\pi}{6} - 3 \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{3}{4} \right) + \frac{27}{2 \cdot 10^6 \cdot 9 \cdot 10^{-2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = 3,427 \cdot 10^{-4} \text{ m/t}$$

De donde la f_t será:

$$f_t = \frac{f_c \cdot f_r}{f_c + f_r} = \frac{3,427 \cdot 0,214}{3,247 + 0,214} \cdot 10^{-4} = 0,201 \cdot 10^{-4} \text{ m/t}$$

Con esto, la estructura a resolver queda como se indica en la figura E7.4d, donde las barras 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7 y 7-2 tienen una elongabilidad

$$\left(\frac{L}{E\Omega}\right)_{eq} = 0,201 \cdot 10^{-4} \text{ m/t}$$

y el resto

$$\frac{L}{E\Omega} = 0,214 \cdot 10^{-4} \text{ m/t}$$

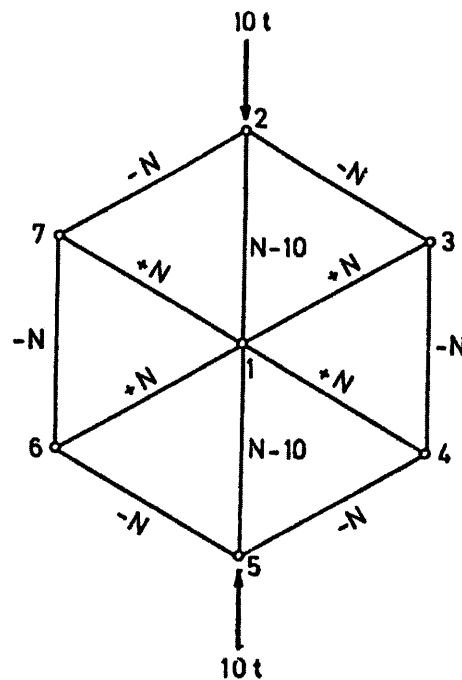


Fig. E7.4d.- Estado (0)

Si se supone que la barra 2-7 tiene una tensión N de compresión resultan los siguientes esfuerzos:

$$N_{2-3} = N_{3-4} = N_{4-5} = N_{5-6} = N_{6-7} = N_{7-2} = -N$$

$$N_{1-3} = N_{1-4} = N_{1-6} = N_{1-7} = +N$$

$$N_{1-2} = N_{1-5} = N - 10$$

Entonces la energía elástica de deformación del sistema es:

$$U = \sum \frac{1}{2} N_i^2 \left(\frac{L}{E\Omega} \right)_i = \frac{1}{2} 0,201 \cdot 10^{-4} \cdot 6 N^2 + 0,214 \cdot 10^{-4} 4N^2 + 2(N - 10)^2$$

Aplicando el teorema de la energía mínima resulta:

$$\frac{\delta U}{\delta N} = 0 ; 0,201 \cdot 10^{-4} \cdot 6N + 0,214 \cdot 10^{-4} (4N + 2N - 20) = 0$$

$$N = 1,719 \text{ t}$$

Si se considera ahora el estado I (figura E7.4e), el acercamiento relativo 2 y 5 es:

$$\Delta_{2-5} = \sum_{i=1}^{12} N_i^0 N_i^I \left(\frac{L}{E\Omega} \right)_i$$

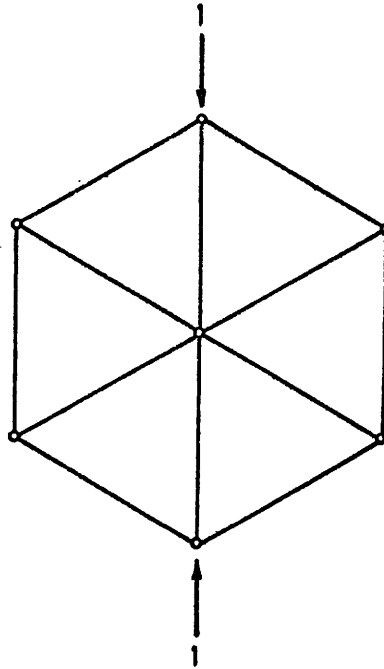


Fig. E7.4e.- Estado (1)

Los esfuerzos de los estados (0) y (1) se expresan en la Tabla E7.2a. El valor de Δ_{2-5} es :

$$\Delta_{2-5} = 3,54 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,354 \text{ mm.}$$

Tabla E7.4a

Factor común			10^{-4}	10^{-5}
Barra	N^0	N^I	$\frac{L}{E\Omega}$	$N^0 N^I \frac{L}{E\Omega}$
2-3	-1,719	-0,1719	0,201	0,594
3-4	-1,719	-0,1719	0,201	0,594
4-5	-1,719	-0,1719	0,201	0,594
5-6	-1,719	-0,1719	0,201	0,594
6-7	-1,719	-0,1719	0,201	0,594
7-2	-1,719	-0,1719	0,201	0,594
1-2	-8,281	-0,8281	0,214	14,675
1-3	1,719	0,1719	0,214	0,632
1-4	1,719	0,1719	0,214	0,632
1-5	-8,281	-0,8281	0,214	14,675
1-6	1,719	0,1719	0,214	0,632
1-7	1,719	0,1719	0,214	0,632

b) Los esfuerzos en las barras interiores son los N^0 de la Tabla E7.4a. Para las barras del contorno se considera el estado de cargas de la figura E7.4f y se obliga a que el acortamiento del conjunto sea igual al de cada barra por separado:

$$\Delta = N^0 f_t = X f_r = Y f_c$$

$$X = \frac{f_t}{f_r} N^0 = \frac{f_c}{f_c + f_r} N^0 = 0,941 N^0$$

$$Y = \frac{f_t}{f_c} = \frac{f_r}{f_c + f_r} N^0 = 0,059 N^0$$

Con lo que resulta para las barras rectas:

$$(N_{2-3})_r = (N_{3-4})_r = (N_{4-5})_r = (N_{5-6})_r = (N_{6-7})_r = (N_{7-2})_r = 1,618 \text{ t}$$

y para las curvas:

$$(N_{2-3})_c = (N_{3-4})_c = (N_{4-5})_c = (N_{5-6})_c = (N_{6-7})_c = -0,101 \text{ t}$$

(en la dirección de la cuerda).

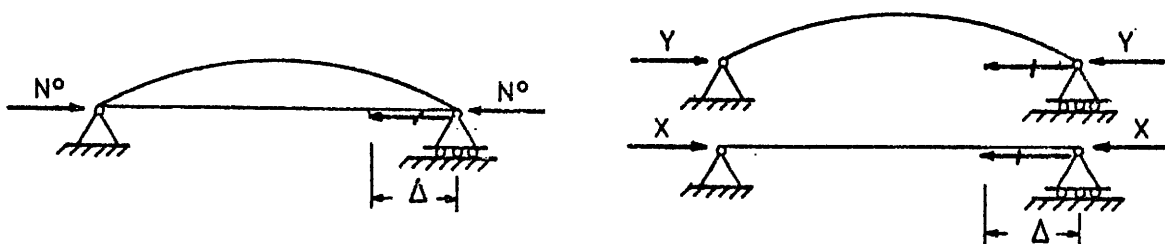


Fig. E7.4f

c) Teniendo en cuenta la figura E7.4g los esfuerzos en las barras curvas son:

$$M_y = -0,101 \cdot 3 (\cos \theta - \cos 30^\circ); \quad -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$$

$$N = -0,101 \cos \theta; \quad -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$$

$$Q = -0,101 \sin \theta; \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$$

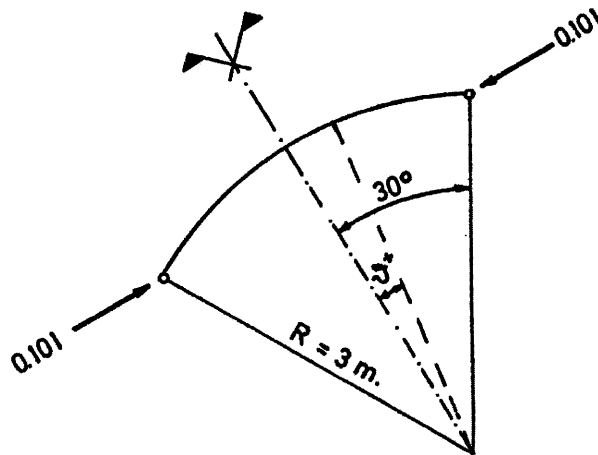


Fig. E7.4g

Ejercicio E7.5.

En la estructura de la figura E7.5a determinar:

- 1) Esfuerzos en todas las barras.
- 2) Corrimiento horizontal del nudo A.

Todas las barras tienen las siguientes características:

$$\Omega = 10 \text{ cm}^2.$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgm. cm}^{-2}.$$

$$I = 20 \cdot 10^4 \text{ cm}^4.$$

El radio de la barra circular es 5 metros.

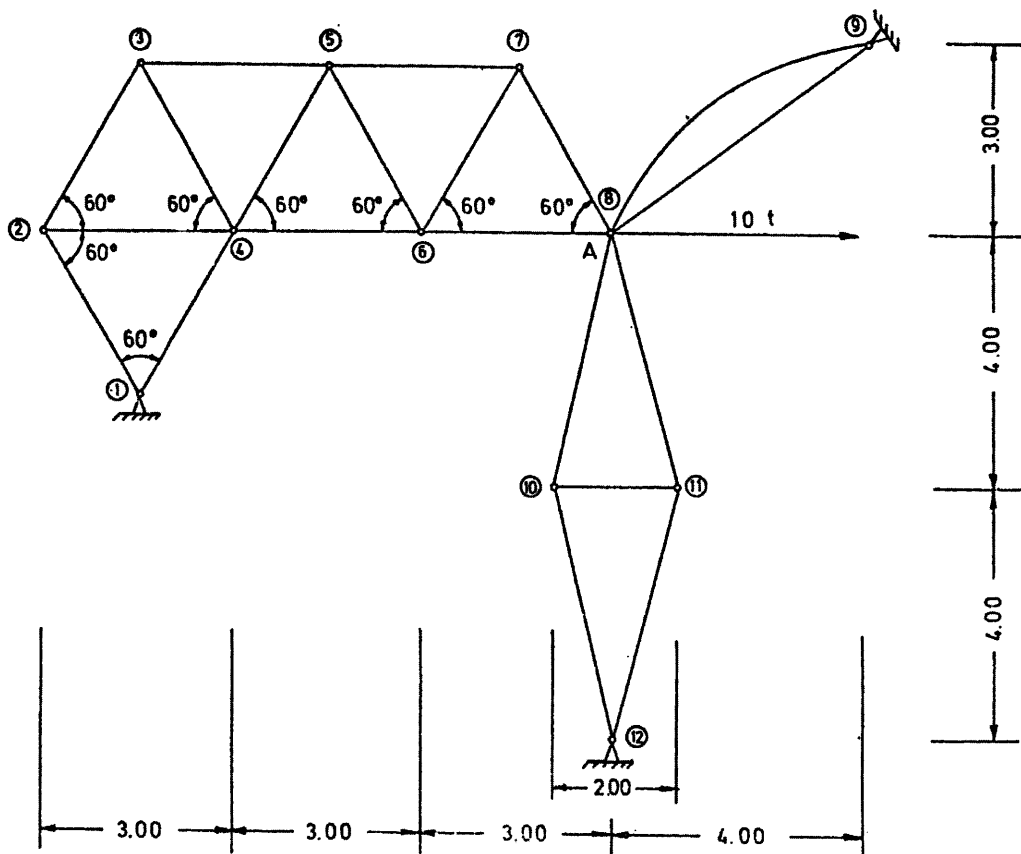


Fig. E 7. 5 a

Se puede descomponer la estructura en tres subestructuras de acuerdo con las figuras E7.5b, E7.5c y E7.5d.

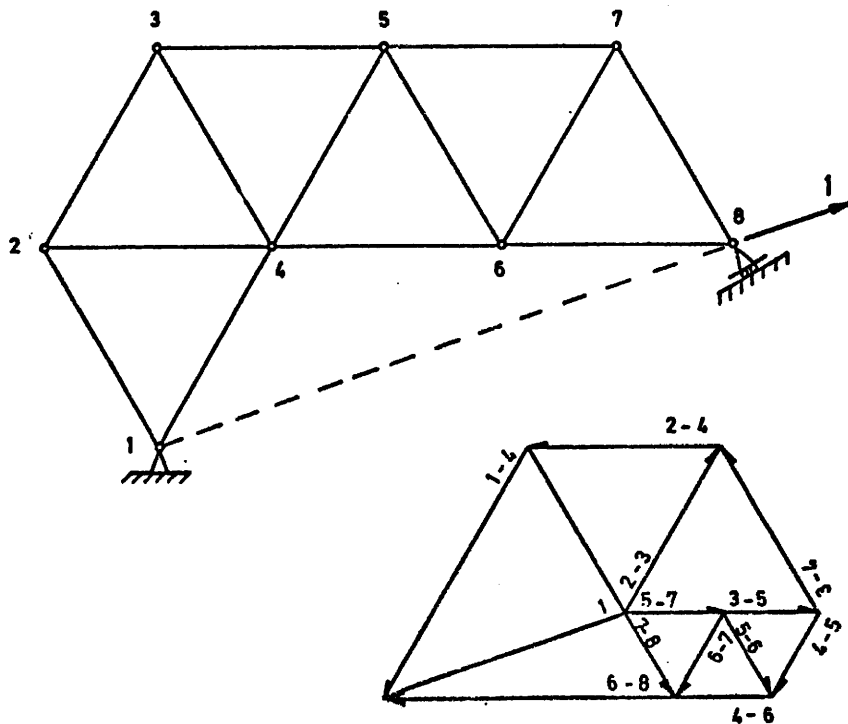
Primeramente, se calcula la elongabilidad equivalente de cada subestructura:

1) Subestructura I

$$E\Omega = 2 \cdot 10^3 \text{ t.cm}^{-2} \cdot 10 \text{ cm}^2 = 2 \cdot 10^4 \text{ t}$$

$$EI = 2 \cdot 10^3 \text{ t.cm}^{-2} \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ cm}^4 = 4 \cdot 10^8 \text{ t.cm}^2 =$$

$$= 4 \cdot 10^8 \cdot 10^{-4} \text{ tm}^2 = 4 \cdot 10^4 \text{ t.cm}^2.$$



Subestructura (I)

Fig. E7.5b

Tabla E7.5a.

BARRA	N^I
1-2	-0,76
1-4	1,14
2-3	-0,76
2-4	0,76
3-4	0,76
3-5	-0,76
4-5	0,38
4-6	1,52
5-6	-0,38
5-7	-0,38
6-7	0,38
6-8	1,15
7-8	-0,38

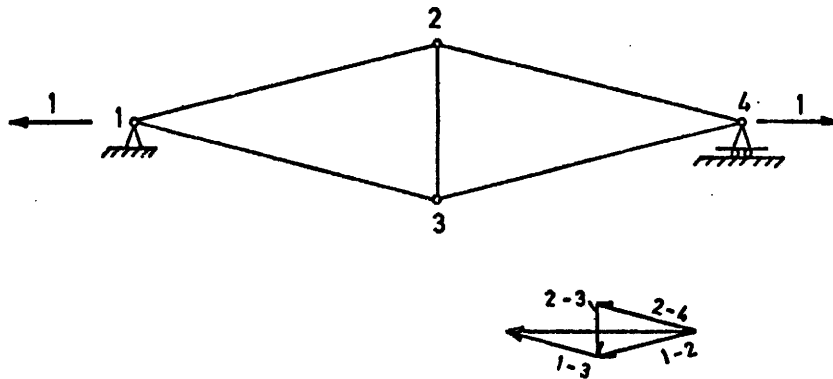
$$d_8 = \sum_{i=1}^{NB} (N^I)^2 \frac{L}{E\Omega} = \frac{3}{2} 10^{-4} \sum (N^I)^2$$

Según la tabla E7.5a se obtiene:

$$d_8 = 12,78 \cdot 10^{-4}$$

es decir:

$$\left(\frac{1}{E\Omega}\right)^I_{eq} = 1,278 \cdot 10^{-3} \frac{m}{t}$$



Subestructura (II)

Fig. E 7.5 c

2) Subestructura II.

Analogamente, se deduce:

Tabla E7.5b.

BARRA	N^I
1-2	0,5
1-3	0,5
2-3	-0,25
2-4	0,5
3-4	0,5

$$d_4 = \sum_{i=1}^{NB} N_i^2 \frac{1_i}{E\Omega} = (4 \cdot 0,5^2 \cdot 4,123 + 0,25^2 \cdot 2) \frac{1}{2} 10^{-4}$$

Según la tabla E7.5b, se obtiene:

$$d_4 = 2,124 \cdot 10^{-4}$$

$\left(\frac{1}{E\Omega}\right)_{eq}^{II} = 2,124 \cdot 10^{-4} \frac{m}{t}$
--

3) Subestructura III.

En la barra circular se tiene:

$$\left(\frac{1}{E\Omega}\right)_{eq} = \frac{R^3}{EI} (\alpha + 2\alpha \cos^2 \alpha - 3 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) + \frac{R}{E\Omega} (\alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)$$

$$\left(\frac{L}{E\Omega}\right)_{eq} = \left\{ \frac{125}{4} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cos^2 30^\circ - 3 \operatorname{sen} 30^\circ \cos 30^\circ \right) + \frac{5}{2} \left(\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} 30^\circ \cos 30^\circ \right) \right\} 10^{-4} =$$

$$= 2,703 \cdot 10^{-4}$$

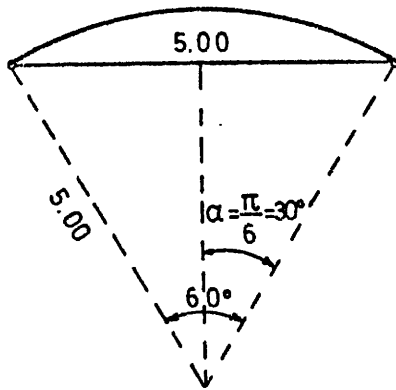


Fig. E7.5 d

Subestructura III

Considerando la barra recta y la curva de la subestructura (III) se tiene:

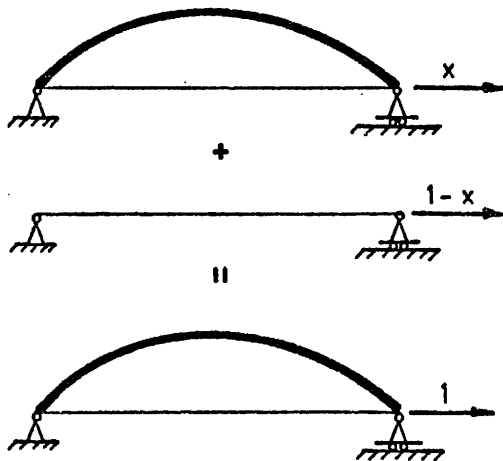


Fig. E7.5 e

$$X \cdot 2,703 \cdot 10^{-4} = (1-X) \frac{5}{2} 10^{-4}$$

$$X(2,703 + 2,5) = 2,5; \quad X = 0,480492$$

$$\left(\frac{1}{E\Omega}\right)_{eq}^{III} = 1,2988 \cdot 10^{-4}$$

$$\begin{aligned} X &= 0,48 \\ 1-X &= 0,52 \end{aligned}$$

Con estos datos el problema se puede reducir al indicado en la figura E7.5f:

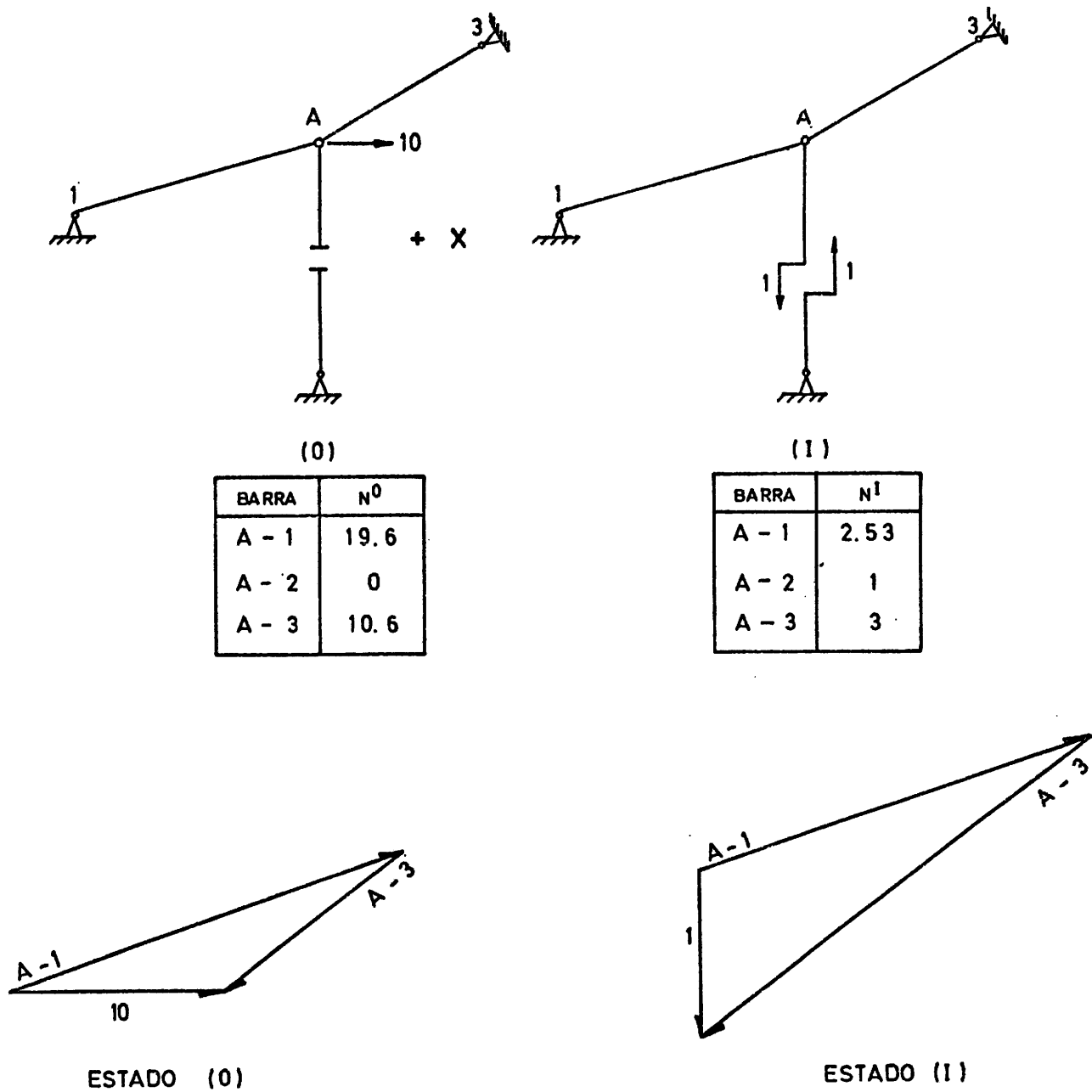


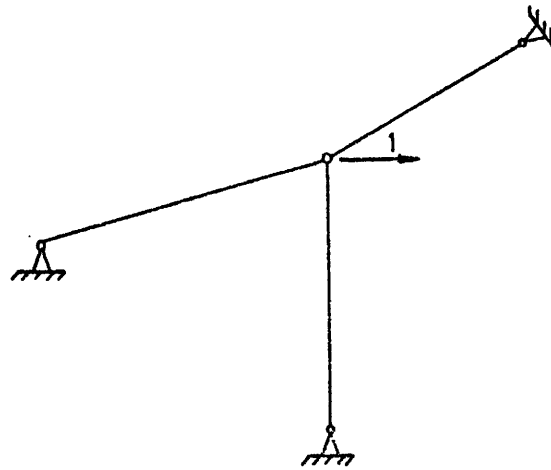
Fig. E 7.5 f

Para calcular el valor de X se procede como sigue:

$$\sum_{i=1}^3 \{ (N^0 + XN^I) \left(\frac{1}{E\Omega} \right)_{eq} + \Delta\delta \} N^I = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^3 N^0 N^I \left(\frac{1}{E\Omega} \right)_{eq} + X \sum_{i=1}^3 (N^I)^2 \left(\frac{1}{E\Omega} \right)_{eq} = 0$$

$$X = - \frac{19,6 \cdot 2,53 \cdot 12,78 + 10,6 \cdot 3 \cdot 1,2988}{2,53^2 \cdot 12,78 + 2,124 + 9 \cdot 1,2988} = - \frac{675,03648}{95,616702} = -7,06$$

Si se considera el estado (II) de la figura E7.5g se deduce la tabla E7.3d, ya que el estado (II) es la décima parte del estado final.



ESTADO (II)

Fig E7.5g

Tabla E7.3d.

Unidades	T	T/m	T	Txm
Factor común		10^{-4}		10^{-4}
BARRA	$N^F = N^0 - 7,06 N^I$	$(1/E\Omega)_{eq}$	N^{II}	$N^F \cdot N^{II} (1/E\Omega)_{eq}$
A-1	1,74	12,78	0,174	3,8693
A-2	-7,06	2,124	-0,706	10,5868
A-3	-10,6	1,2988	-1,06	14,5933
Σ				29,05

El desplazamiento horizontal de A es:

$$29,05 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 2,905 \text{ mm.}$$

$$d_{xA} = 2,9 \text{ mm.}$$

Los esfuerzos finales se obtienen como sigue:

-Subestructura I : Se multiplican los valores de la tabla 1 por 1,74.

-Subestructura II : Se multiplican los valores de la tabla 2 por -7,06:

-Subestructura III : Se multiplican los valores de la tabla 3 por -10,6.

Los resultados finales se representan en la tabla E7.3f.

BARRA	ESFUERZO	BARRA	ESFUERZO
1-2	-1,32	6-7	0,66
1-4	1,98	6-8	1,98
2-3	-1,32	7-8	-0,66
2-4	1,32	8-9 (recta)	-3,67
3-4	1,32	8-9 (curva)	-3,39
3-5	-1,32	8-10	-5,3
4-5	0,66	8-11	-5,3
4-6	2,64	10-11	2,65
5-6	-0,66	10-12	-5,3
5-7	-0,66	11-12	-5,3

Tabla E7.3f.

NOTA:

El esfuerzo en la barra curva se da en la dirección de la cuerda.

Ejercicio E7.6.

La estructura articulada de la figura E7.6 se encuentra sometida a un conjunto desconocido de acciones (fuerzas en todos los nudos y errores de montaje en las barras diagonales). Los resultados de los esfuerzos en las barras se indican en la tabla E7.6a.

Por otra parte, se sabe que la barra 4-6 se ha colocado en la estructura 2 cm., más corta que su longitud teórica y que el movimiento relativo final de separación entre los nudos 1 y 6 ha sido 1 cm.

Todas las barras son de sección constante e igual a 2 cm^2 . y su módulo de elasticidad es de $2 \cdot 10^6 \text{ kg. cm}^{-2}$.

SE PIDE: Movimiento vertical del nudo 6.

Tabla E7.6a.

Barra	Toneladas	Barra	Toneladas	Barra	Toneladas
1-2	-10	1-5	-4	3-8	-6
2-3	-15	2-6	-26	2-5	-10
3-4	-10	3-7	-10	3-6	14
5-6	13	4-8	-6	4-7	23
6-7	18	1-6	18	4-6	10
7-8	11	2-7	-13	(+) tracción	

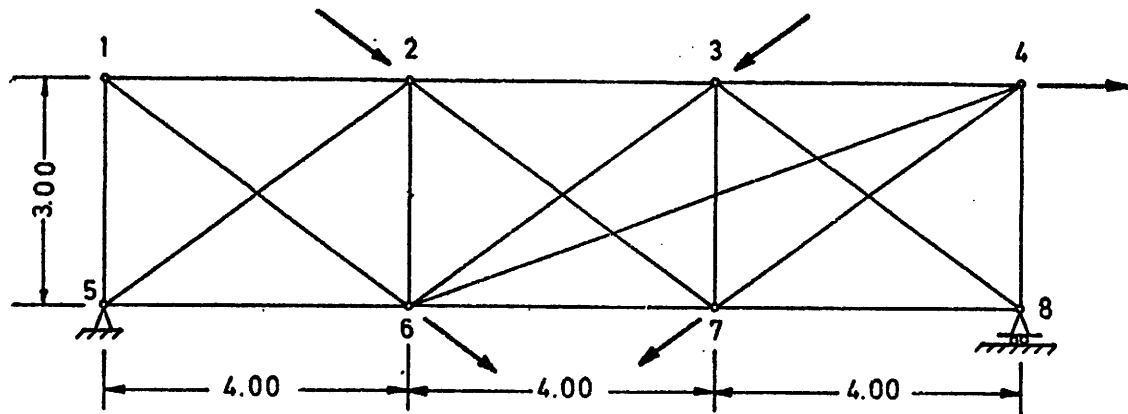


Fig. E7. 6 a

El desplazamiento vertical del nudo 6 es:

$$d_{y6} = \sum_{i=1}^{NB} \Delta_i^R N_i^I = \sum_{i=1}^{NB} \left\{ N_i^0 \frac{l_i}{E\Omega} + \Delta_i \right\} N_i^I$$

Como estado (I), en autoequilibrio con la fuerza vertical de tonelada en el nudo 6, se elige el de la figura E7.6b:

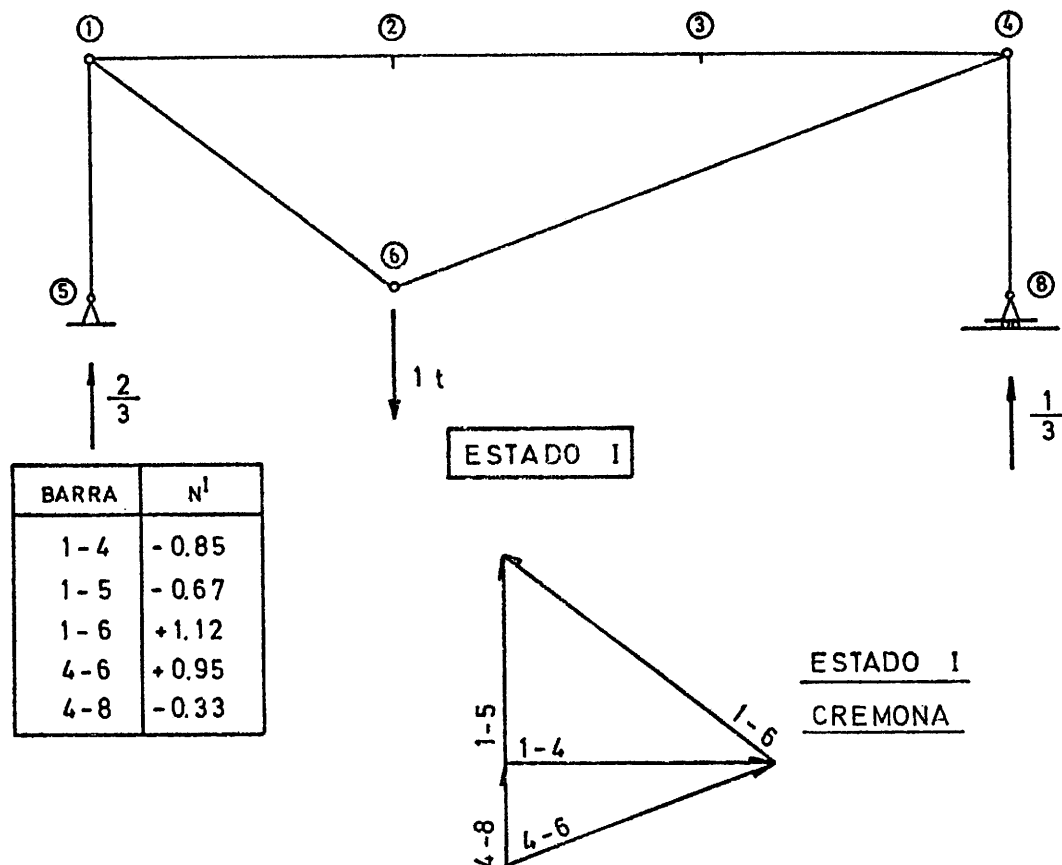


Fig. E7.6 b

En la tabla E7.6a se realizan ordenadamente las operaciones.

Tabla E7.6a.

Unida- des	T	m/T	m	m	m	T	m
Factor común		10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}		10^{-3}
BARRA	N_i^o	$l_i/E\Omega$	$N_i^o l_i/E\Omega$	$\Delta\delta_i$	δ_i^R	N_i^I	$\delta_i^R N_i^I$
1-2	-10	1	-10	0	-10	-0,85	8,5
2-3	-15	1	-15	0	-15	-0,85	12,75
3-4	-10	1	-10	0	-10	-0,85	8,5
1-5	- 4	0,75	- 3	0	- 3	-0,67	2,01
1-6	18	1,25	22,5	?	10	1,12	11,2
4-6	10	2,136	21,36	-20	1,36	0,95	1,292
4-8	- 6	0,75	-4,50	0	-4,5	-0,33	1,5
Σ							45,75

$$E\Omega = 2,10^3 \text{ t.cm}^{-2} \cdot 2\text{cm}^2$$

$$E\Omega = 4 \cdot 10^3 \text{ t.}$$

$$d_{y6} = 46,23 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 46,23 \cdot 10^{-1} \text{ cm.}$$

$$d_{y6} = 4,57 \text{ cm} \quad \text{Luego el nudo 6 baja 4,57 cm.}$$

Ejercicio E8.1.

En la estructura de la figura E8.1a se pide:

- 1) Línea de influencia del esfuerzo en el tirante CD
- 2) Línea de influencia del axil en la barra AB
- 3) Línea de influencia de la rotación de la barra AE

Se supone que la carga unitaria recorre el cordón superior.

Características de las barras y tirante

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgm. cm}^{-2}.$$

$$\Omega = 10 \text{ cm.}$$

Se supone que el tirante sólo resiste tracciones.

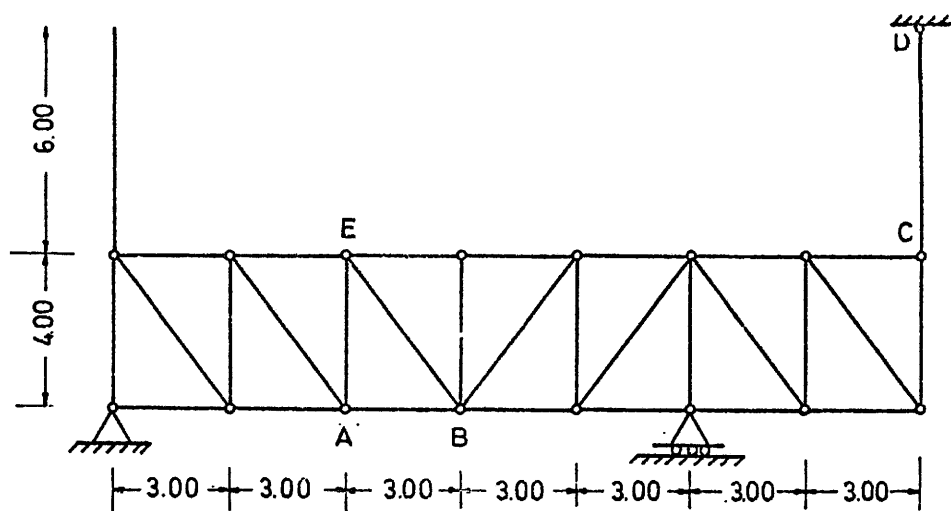


Fig. E 8.1 a

1) Línea de influencia del esfuerzo axial en el tirante CD

Este es un ejemplo de estructuras con material no lineal.

Aplicando el teorema de Maxwell - Möhr a los estados I y II de la figura E8.1b se tiene:

$$P \cdot V^{II}(x) + N \cdot \Delta_{CD}^{II} = P \cdot d_{yc}^I$$

$$1 \cdot V^{II}(x) + N \cdot \Delta_{CD}^{II} = 1 \cdot \left(-\frac{NL}{E\Omega}\right); \quad V^{II}(x) = -N\left(\Delta_{CD}^{II} + \frac{L}{E\Omega}\right);$$

$$N = -\frac{V^{II}(x)}{\Delta_{CD}^{II} + \frac{L}{E\Omega}}$$

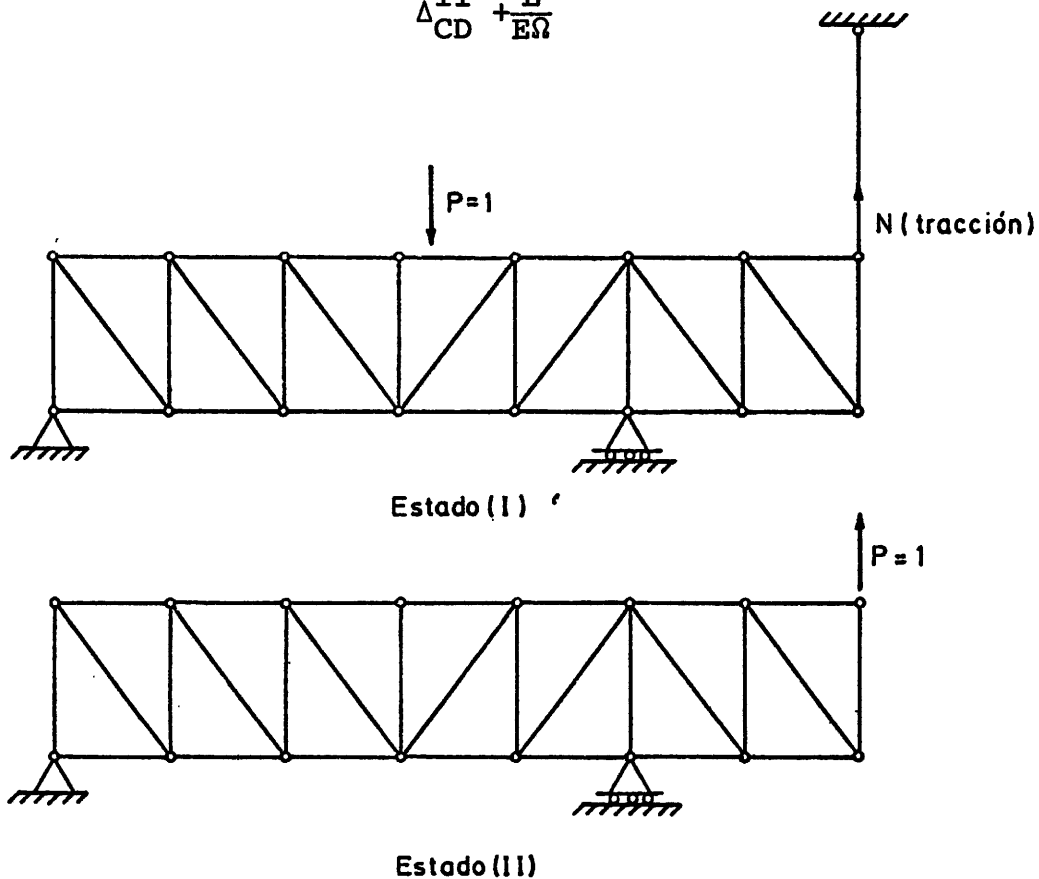


Fig. E8.1 b

Hay que resolver el estado (II); que se muestra en la figura E8.1c. Los resultados numéricos correspondientes se indican en la Tabla E8.1a.

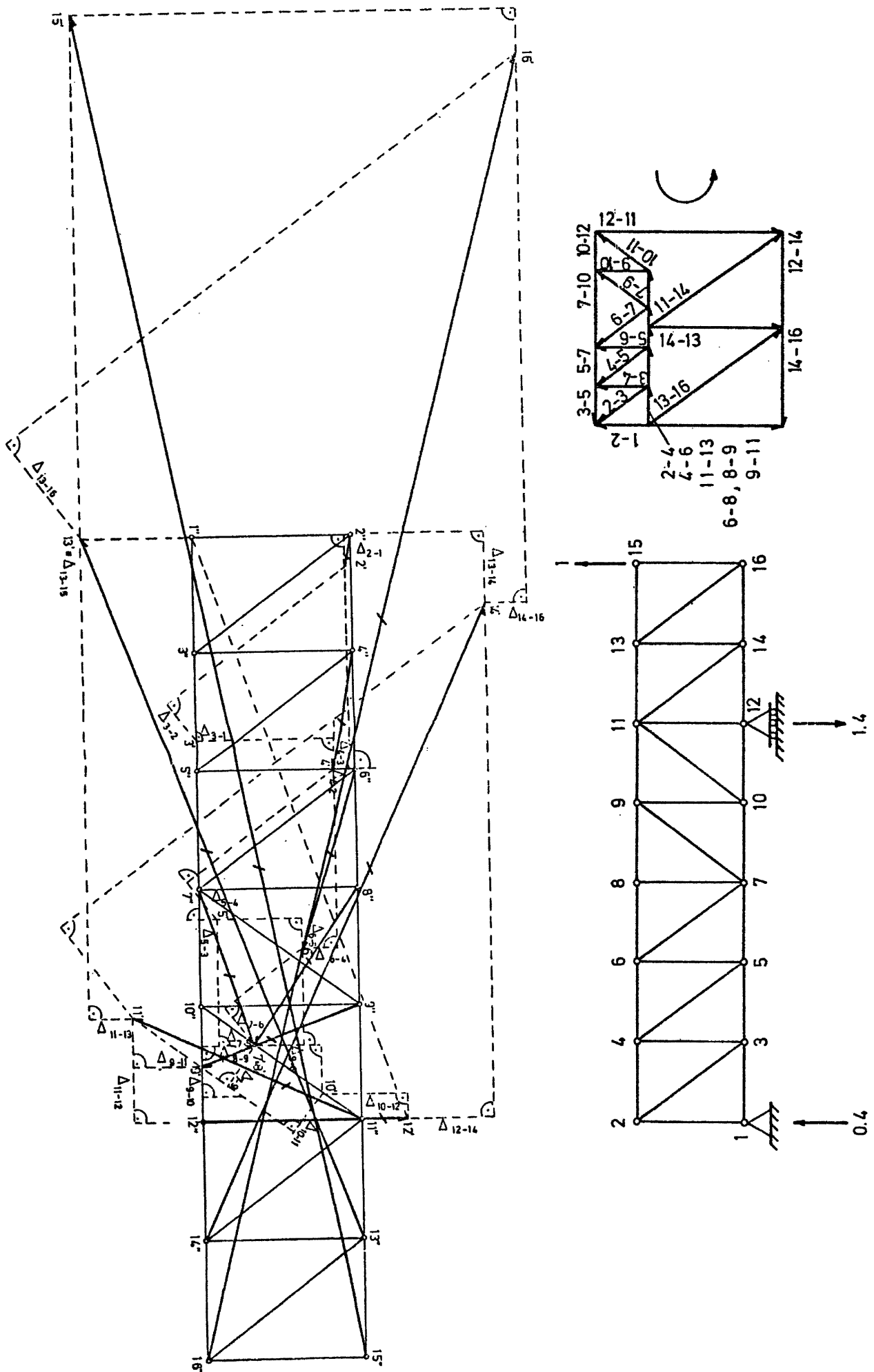


Fig. E8.1c

TABLA E.8. 1a

Factor común	10^{-4}		10^{-4}		10^{-4}	10^{-4}		10^{-4}
BARRA	$\frac{L}{E\Omega}$	$N^{II} N^{VA}$	Δ^{II}	N^V	$N^V N^{VI} \frac{L}{E\Omega}$	$(N^{VI})^2 \frac{L}{E\Omega}$	$N^{IV} = N^V + N^{VI}$	Δ^{IV}
1-2	2	-0,4	-0,8	+0,26	-0,203	+0,32	+0,2486	+0,4972
1-3	1,5	0	0	0	0	0	0	0
2-3	2,5	+0,5	+1,25	-0,33	-0,416	+0,625	-0,3108	-0,777
2-4	1,5	-0,3	-0,45	+0,2	-0,09	+0,135	+0,1865	+0,2797
3-4	2	-0,4	-0,8	+0,26	-0,213	+0,32	+0,2486	+0,4972
3-5	1,5	+0,3	+0,45	-0,2	-0,09	+0,135	-0,1865	-0,2797
4-5	2,5	+0,5	+1,25	-0,33	-0,416	+0,625	-0,3108	-0,777
4-6	1,5	-0,6	-0,9	+0,4	-0,36	+0,54	+0,373	+0,5595
5-6	2	-0,4	-0,8	+0,26	-0,213	+0,32	+0,2486	+0,4972
5-7	1,5	+0,6	+0,9	+0,6	+0,54	+0,54	+0,627	+0,9405
6-7	2,5	+0,5	+1,25	-0,33	-0,416	+0,625	-0,3108	-0,777
6-8	1,5	-0,9	-1,35	-0,4	+0,54	+1,215	-0,4405	-0,6607
7-8	2	0	0	0	0	0	0	0
7-9	2,5	-0,5	-1,25	+0,33	-0,416	+0,625	+0,3108	+0,777
7-10	1,5	+1,2	+1,8	+0,2	+0,36	+2,16	+0,254	+0,381
8-9	1,5	-0,9	-1,35	-0,4	+0,54	+1,215	-0,4405	-0,6607
9-10	2	+0,4	+0,8	-0,26	-0,213	+0,32	-0,2486	-0,4972
9-11	1,5	-1,2	-1,8	-0,2	+0,36	+2,16	-0,254	-0,381
10-11	2,5	-0,5	-2,25	+0,33	-0,416	+0,625	+0,3108	+0,777
10-12	1,5	+1,5	+2,25	0	0	+3,375	+0,0675	+0,1012
11-12	2	+1,4	+2,8	-0,26	-0,746	+3,92	-0,2036	-0,4072
11-13	1,5	-0,74	-1,11	0	0	+0,8214	-0,0333	-0,0499
11-14	2,5	-1,25	-3,125	0	0	+3,906	-0,0562	-0,1405
12-14	1,5	+1,5	+2,25	0	0	+3,375	+0,0675	+0,1012
13-14	2	+1	+2	0	0	2	+0,045	+0,09
13-15	1,5	0	0	0	0	0	0	0
13-16	2,5	-1,26	-3,15	0	0	+3,969	-0,0567	-0,1417
14-16	1,5	+0,74	+1,11	0	0	+0,8214	+0,0333	+0,0499
15-16	2	+1	+2	0	0	2	+0,045	+0,09
Σ					-1,878	36,692		

Con los resultados de la tabla anterior se efectúa el Williot de la Fig.E8.1c

Como ya se sabe el valor de N es:

$$N = - \frac{V_{(x)}^{II}}{\Delta_{CD}^{II} + \frac{L}{E\Omega}}$$

Δ_{CD}^{II} = desplazamiento vertical del nudo 15 = $36,5 \cdot 10^{-4}$ m

$$\frac{L}{E\Omega} = \frac{L_{\text{tirante}}}{E\Omega} = \frac{6}{2 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ T}^{-1}$$

Luego:

$N = \frac{-V^{II}(x)}{39,5 \cdot 10^{-4}} \text{ T}$, donde $V(x)$ es la deformada del cordón superior en el Williot. Téngase en cuenta que de los desplazamientos de los nudos, sólo interesa su componente vertical.

Los valores de N se dan en la tabla E8.2b.

Tabla E8.2b

NUDOS	$V^{II}(x)$ vertical	$-V^{II}(x)/39,5 \cdot 10^{-4} = N$
15	$-39,5 \cdot 10^{-4}$	1
13	$-20,1 \cdot 10^{-4}$	0,5088
11	$-2,77 \cdot 10^{-4}$	0,070
9	$+1,6 \cdot 10^{-4}$	-0,040

La línea de influencia del esfuerzo en el tirante CD está representada en la figura E8.1d. Dicha línea de influencia sólo es efectiva hasta P, porque desde este punto hacia la izquierda el cable estaría a "compresión", y eso no es posible, pues el cable no aguanta compresiones.

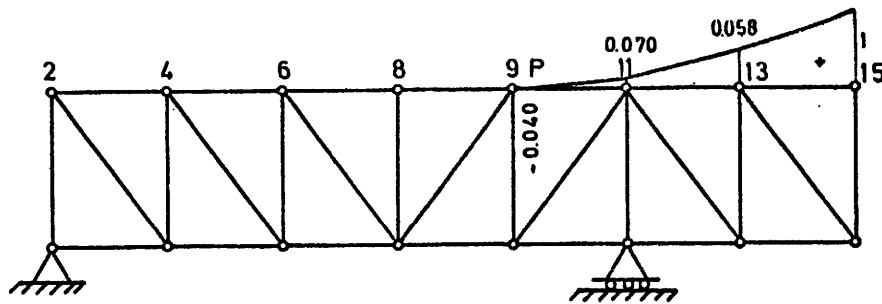


Fig. E 8.1d

2) Línea de influencia del esfuerzo axial en la barra AB

2.a) Cuando la carga unitaria recorre el cordón superior desde el punto P hacia la derecha (ver figura E8.1e).

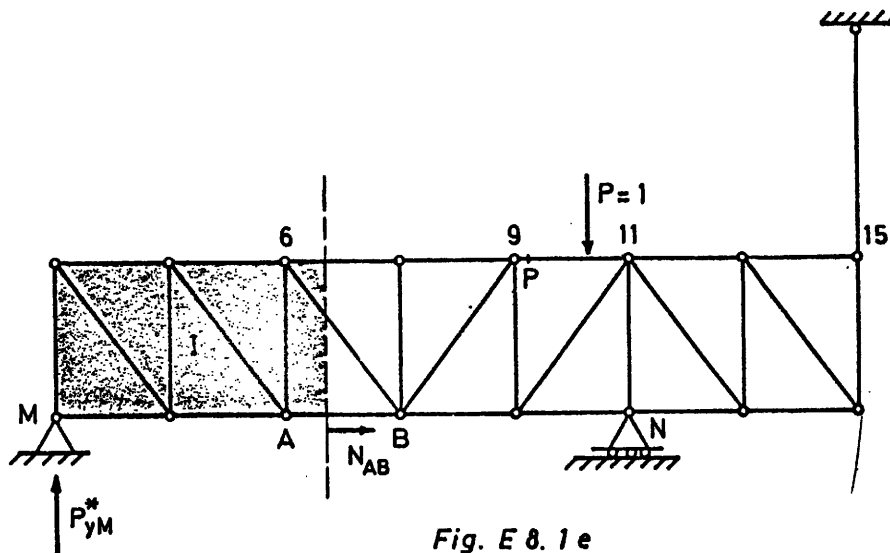


Fig. E 8.1e

Si se toman momentos de las fuerzas situadas en la parte sombreada (I), de la figura E8.1e, respecto al nudo 6 se tiene:

$$-P_{ym}^* 6 + N_{AB} \cdot 4 = 0 \quad N_{AB} = 1,5 P_{ym}^*$$

Ya se ve que la línea de influencia es 1,5 veces la línea de influencia de P_{ym}^* . Esta puede ser conocida, pues se sabe la tensión (línea de influencia) del tirante.

$P = 1$ actuando en 15; $P_{ym}^* = 0$ ya que $N_{CD} = 1$

$P = 1$ actuando en 13; $N_{CD} = 0,5088$; $\Sigma M_N = 0$; $P_{ym}^* =$

$$= \frac{0,5088 \cdot 6 - 3}{15} = 0,035$$

$P = 1$ actuando en 11; $N_{CD} = 0,070$; $M_N = 0$; $P_{ym}^* = \frac{0,070 \cdot 6}{15} = 0,028$

$P = 1$ actuando en 9; $N_{CB} = 0$; $M_N = 0$; $P_{ym}^* = \frac{1 \cdot 2,5}{15} = 0,1666$

Estos valores multiplicados por 1,5 definen la - línea de influencia de N_{AB} que está dibujada en la figura E8.1f.

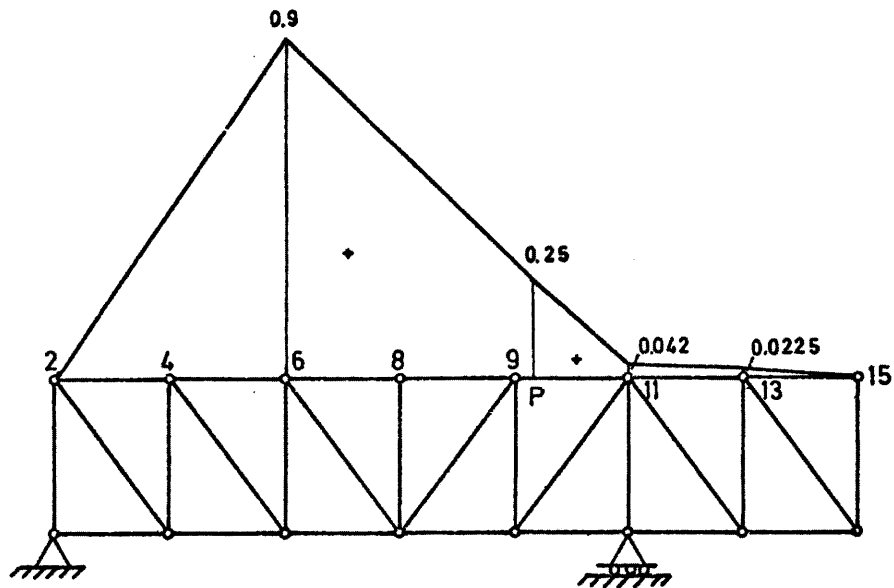


Fig. E8.1 f

2.b) La carga actúa a la izquierda del punto P y a la derecha del punto 6 (figura E8.1g).

El cable trabaja a compresión; por lo que podemos prescindir de él y la estructura ya es isostática

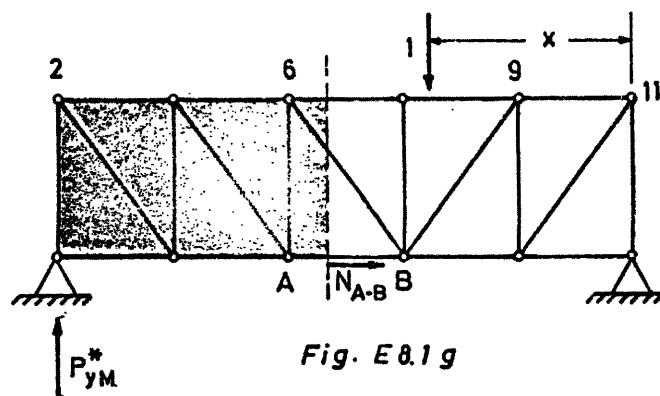
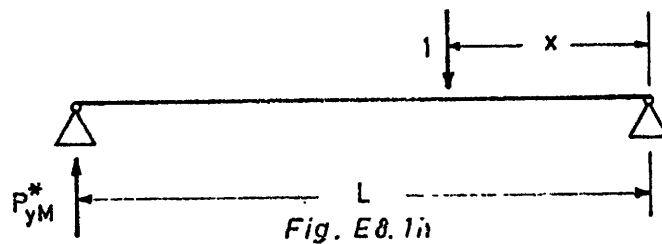


Fig. E8.1 g

Tomando momentos respecto al nudo 6 de las fuerzas situadas en la parte sombreada:

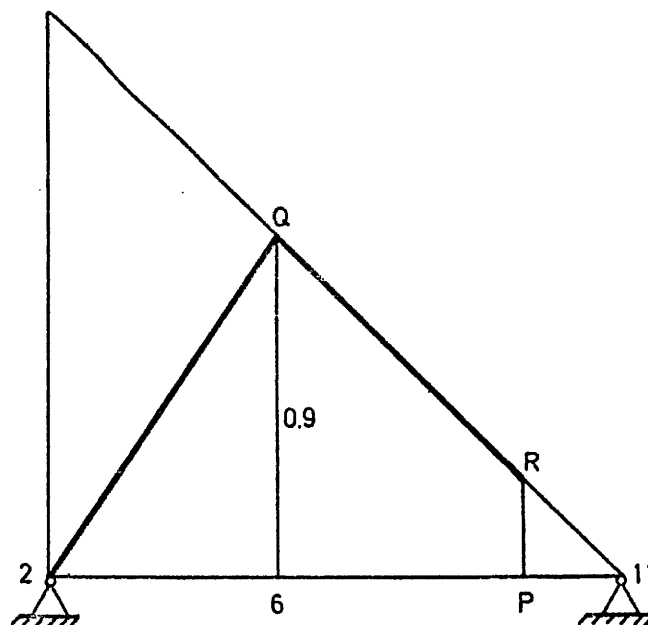
$$-P_{ym}^* \cdot 6 + N_{AB} \cdot 4 = 0; \quad N_{AB} = 1.5 P_{ym}^*$$

P_{ym}^* es la de una viga biapoyada como la de la figura E8.1h.



$$1 \cdot x = P_{ym}^* \cdot L; \quad P_{ym}^* = \frac{x}{L}$$

Luego la reacción cuando la carga actúa entre los puntos P y 6 es la que se indica en la figura E8.1i entre los puntos Q y R.



En el punto 6 $P_{ym} = \frac{9}{15}$; luego $N_{AB} = 1,5 P_{ym}^* = 0,9$.

El tramo que queda ha de ser la línea marcada que une los puntos Q y Z de la figura E8.1i.

El resultado se observa en la figura E8.1f.

3) Línea de influencia de la rotación AE

Aplicando el teorema de reciprocidad a los estados III y IV de la figura E8.1j se deduce:

$$P V^{II}(x) = G \quad EA; \quad EA = \frac{V^{II}(x)}{G} \quad \text{con } G = 1,4 \text{ Txm}$$

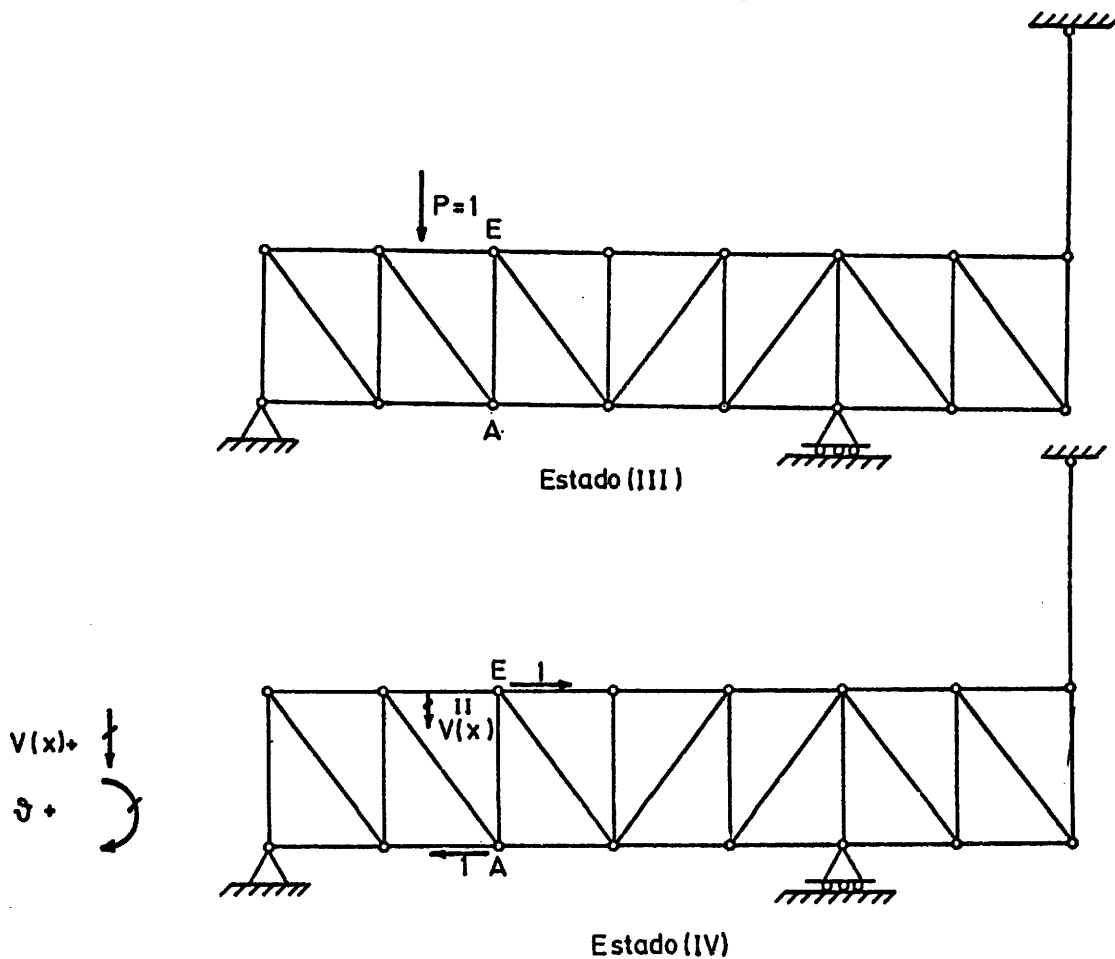
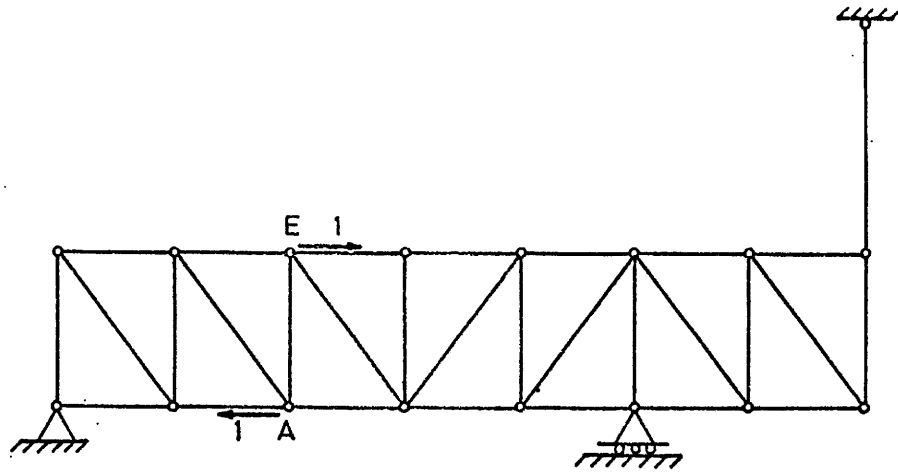


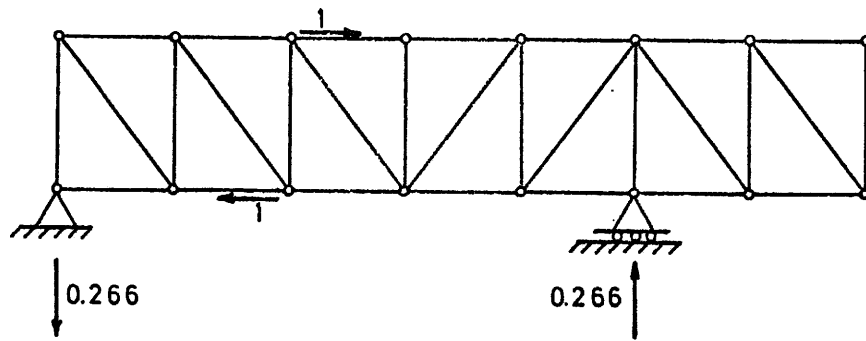
Fig. E8. 1 j

Hay que hallar la deformada $V^{II}(x)$ de la figura E8.1j. Para resolver ese estado IV se consideran a su vez los estados de la figura E8.1k.

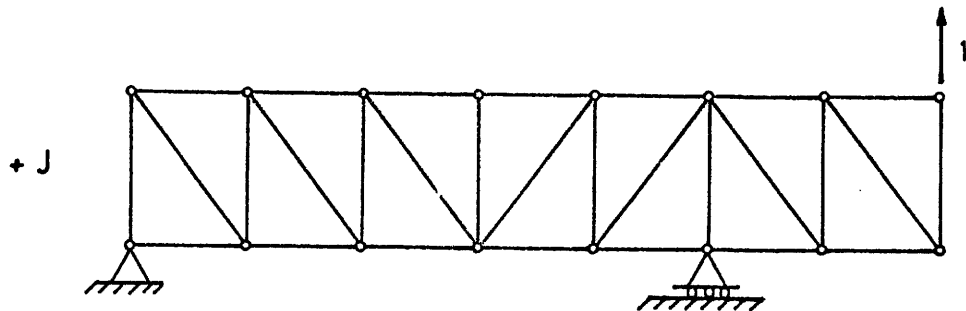


Estado (IV)

=

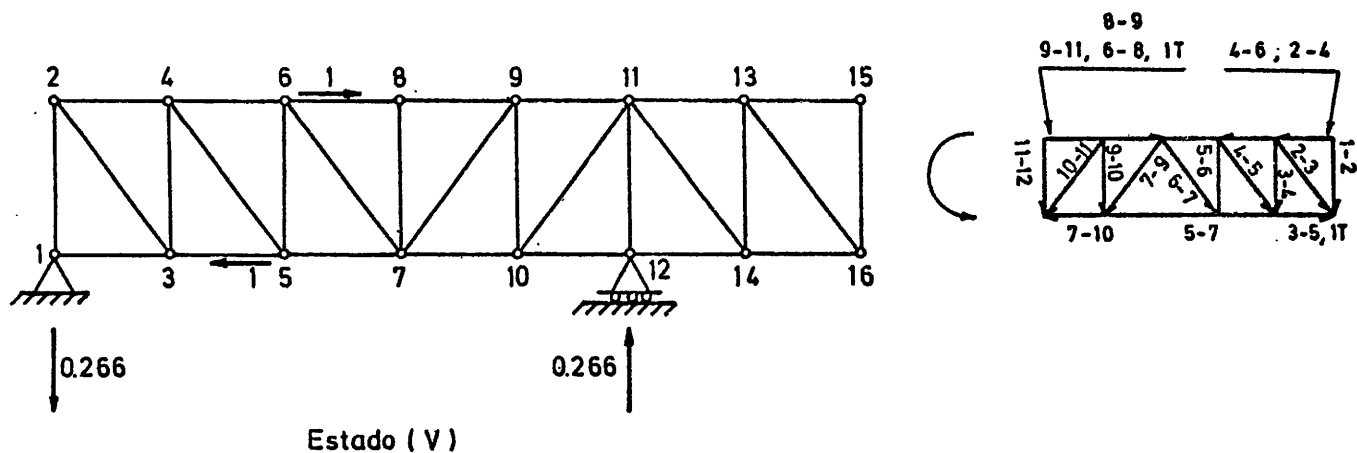


Estado (V)



Estado (VI)

Fig. E8.1k



Los resultados se tienen en la Tabla E8.1a. El Cremona del estado V se puede ver en la figura E8.11.

Para hallar el valor del influjo J se puede plantear que los esfuerzos del estado (IV) estén en equilibrio, y esto se puede hacer obligando a que el trabajo total sea cero con los desplazamientos y deformaciones del estado (VI).

$$\sum_{i=1}^{NB-1} (N^V \cdot N^{VI} \frac{L}{E\Omega} + J (N^{VI})^2) = - \frac{JL}{E\Omega}$$

Teniendo en cuenta la tabla E8.1a se tiene:

$$\sum_{i=1}^{NB-1} N^V \cdot N^{VI} \frac{L}{E\Omega} = - 1,878 \cdot 10^{-4}$$

$$\sum_{i=1}^{NB-1} (N^{VI})^2 \frac{L}{E\Omega} = 36,6928 \cdot 10^{-4}$$

$$\left(\frac{L}{E\Omega}\right)_{\text{cable}} = 3 \cdot 10^{-4}$$

De donde:

$$-1,878 + 36,6928 J = -3 J ; \quad J = 0,045$$

Si el resultado hubiera sido $J < 0$, como se trata de un cable, el único estado que se tendría en cuenta sería el 0. Pero como $J > 0$, el estado total es:

$$N^{IV} = N^V + JN^{VI} ; \quad (J = 0,045)$$

Los esfuerzos totales se tienen en la Tabla E8.1a.

Los Δ^{IV} necesarios para aplicar Williot están en la misma tabla.

El Williot se halla en la figura E8.1m.

La línea de influencia pedida se indica en la figura E8.1n donde como ya se sabe:

$$EA = \frac{V^{IV}(x)}{G} = \frac{V^{IV}(x)}{4}$$

$V^{IV}(x)$ son las componentes verticales de los corrimientos.

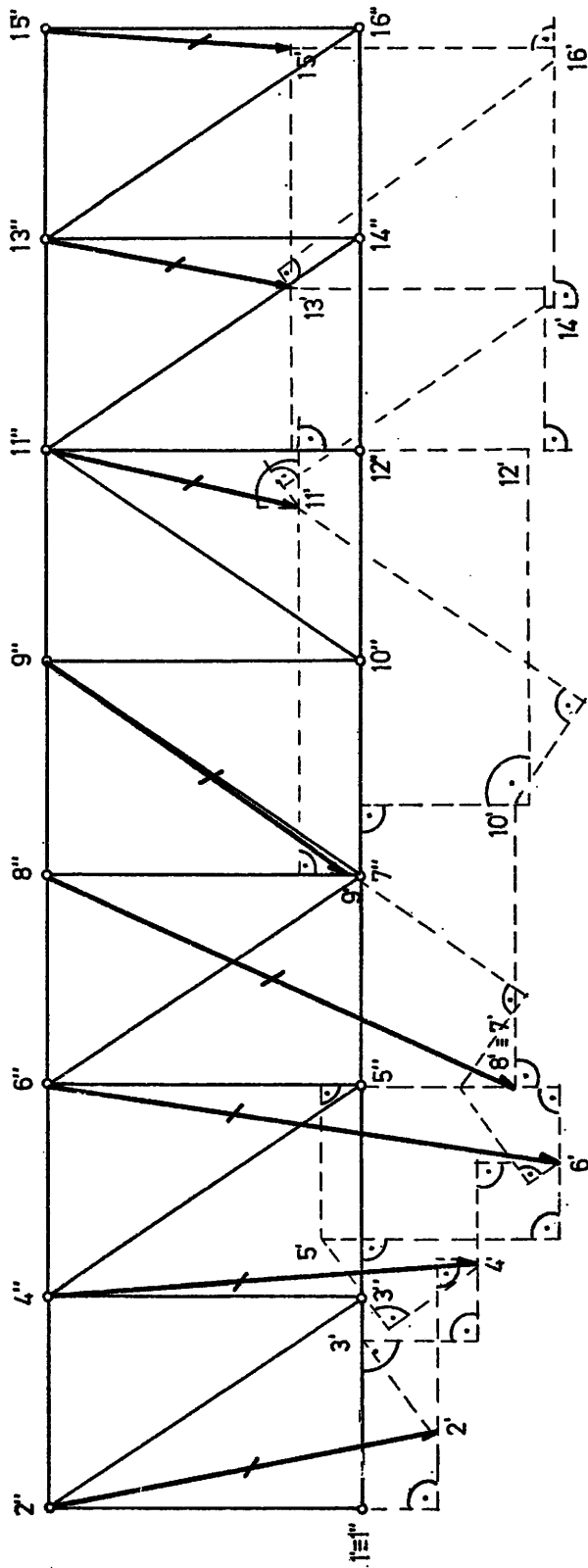


Fig. E 8. 1 l.

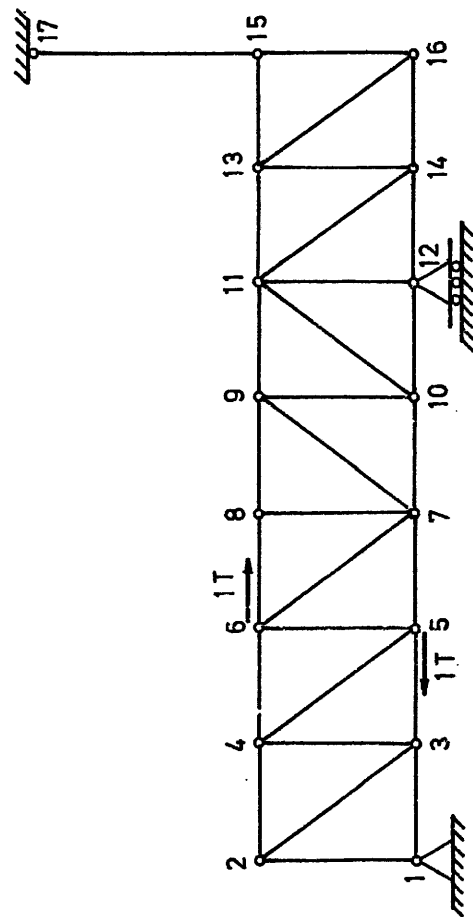


Fig. E 8. 1 m

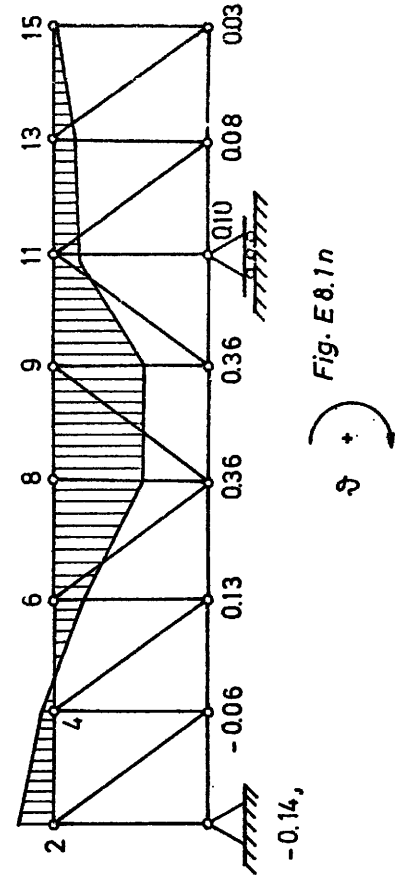


Fig. E 8. 1 n

Ejercicio E8.2.

Hallar la línea de influencia del esfuerzo axial en la barra 10-11 de la figura E8.2a para una carga vertical - unidad recorriendo el cordón inferior.

Características de las barras:

Sección : 10 cm^2 .

Sección barra 10-11: 2 cm^2 .

Módulo de elasticidad: $2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

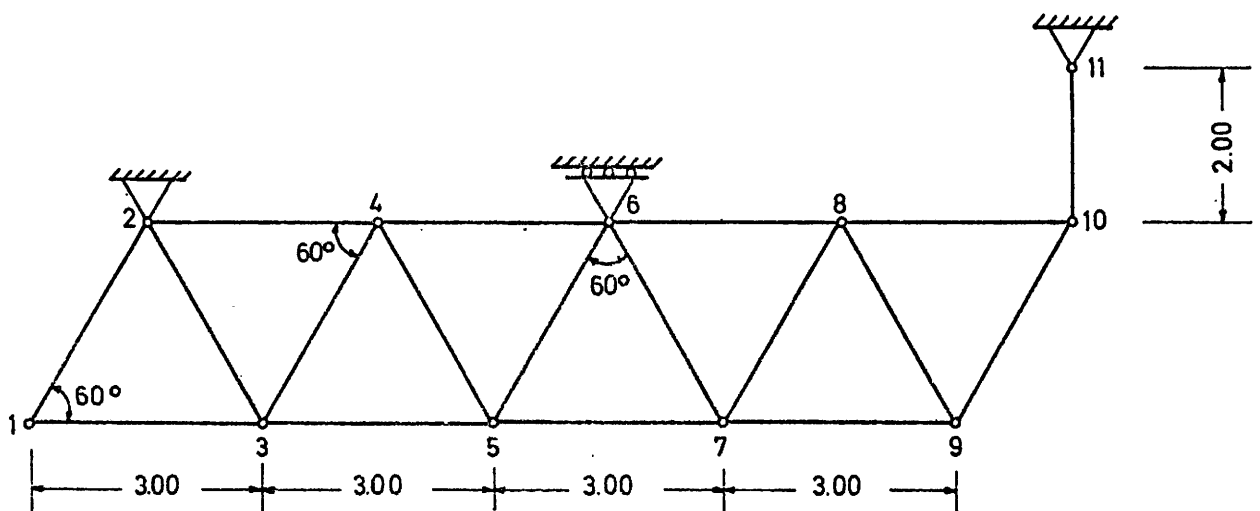


Fig. E 8.2 a

Aplicando el teorema de MAXWELL a los estados (I) y (II) de la figura E8.2b se tiene:

$$1 \cdot v_{(x)}^{II} + N_{10-11}^I \cdot d_{y10}^{II} = -1 \cdot d_{y10}^I = -N_{10-11}^I \left(\frac{L}{E\Omega} \right)_{10-11}$$

$$N_{10-11}^I = \frac{v_{(x)}^{II}}{d_{y10}^{II} + \left(\frac{L}{E\Omega} \right)_{10-11}}$$

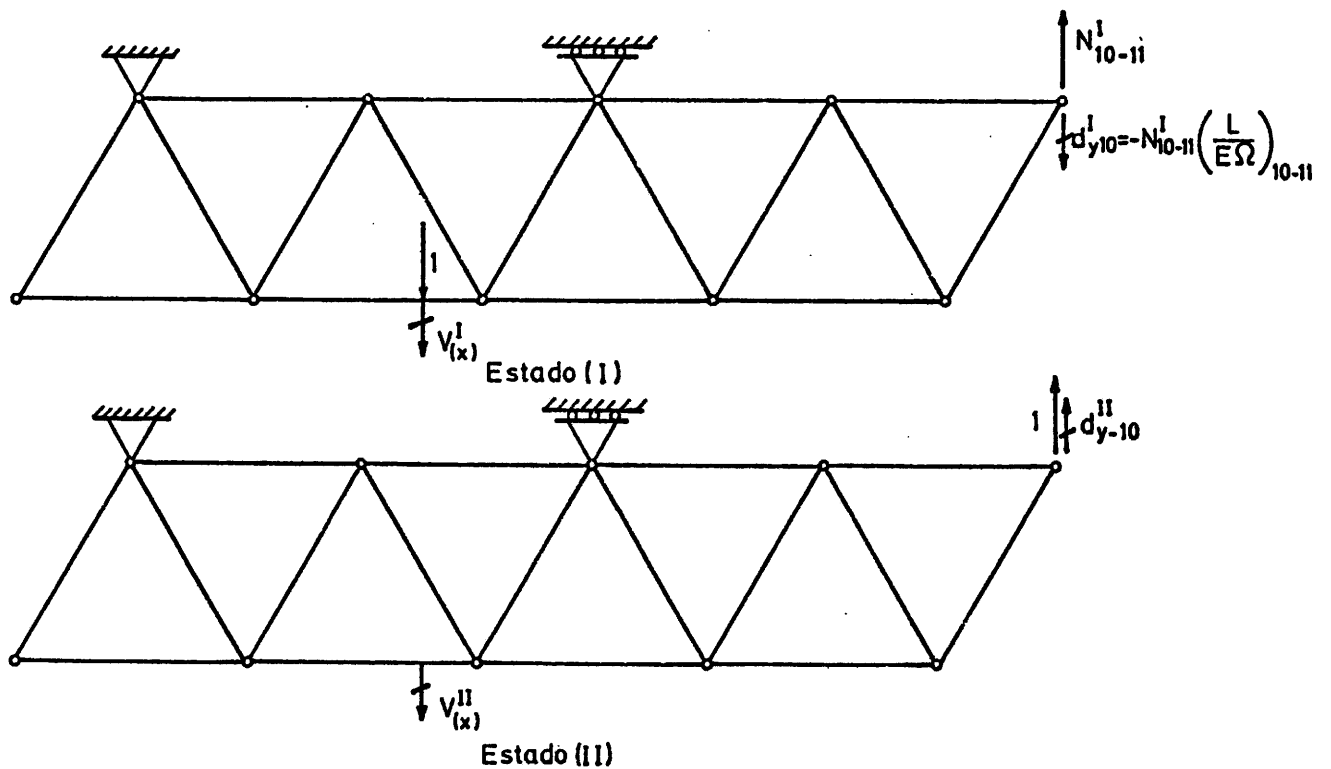


Fig. E8.2 b

Es decir, basta con hallar la deformada del cordón inferior de la estructura del estado II y multiplicarla por el factor de proporcionalidad

$$\frac{1}{d_{y10}^{II} + \left(\frac{L}{E\Omega} \right)_{10-11}}$$

Sólo se considera la componente vertical de los desplazamientos en la citada deformada.

Los valores de $L/E\Omega$ son:

$$\left(\frac{L}{E\Omega}\right)_{10-11} = \frac{2}{2 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m/t}$$

$$\left(\frac{L}{E\Omega}\right)_{\text{resto}} = \frac{3}{2 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m/t}$$

En la tabla E8.2a se da la relación de esfuerzos y deformaciones en cada barra para el estado (II). En la figura E8.2c se efectúa el Williot para este estado, cuyos resultados numéricos, para los desplazamientos verticales de los nudos del cordón inferior, se dan en la tabla E8.2b.

Factor Comun	10^{-4}		10^{-4}
Barra	$L/E\Omega$	N^{II}	Δ
1-2	1,5	0	0
1-3	1,5	0	0
2-3	1,5	1,155	1,7325
2-4	1,5	-0,577	-0,8655
3-4	1,5	-1,155	-1,7325
3-5	1,5	1,155	1,7325
4-5	1,5	1,155	1,7325
4-6	1,5	-1,732	-2,5980
5-6	1,5	-1,155	-1,7325
5-7	1,5	2,310	3,4650
6-7	1,5	-1,155	-1,7325
6-8	1,5	-1,732	-2,5980
7-8	1,5	1,155	1,7325
7-9	1,5	1,155	1,7325
8-9	1,5	-1,155	-1,7325
8-10	1,5	-0,577	-0,8655
9-10	1,5	1,155	1,7325

Tabla E8.2b

Nudo	d_y^{II}	$k d_y^{II}$
1	$0,80 \cdot 10^{-4}$	0,0186
3	$1,27 \cdot 10^{-4}$	0,0295
5	$1,80 \cdot 10^{-4}$	0,0419
7	$-7,80 \cdot 10^{-4}$	0,1814
9	$-27,35 \cdot 10^{-4}$	0,6361
10	$38,00 \cdot 10^{-4}$	

Donde k tiene el valor:

$$k = \frac{1}{d_{y-10}^{II} + \left(\frac{L}{E\Omega}\right) 10^{-11}} = \frac{10^4}{38 + 5} = 232,558$$

La línea de influencia pedida es la que se indica en la figura E8.2d.

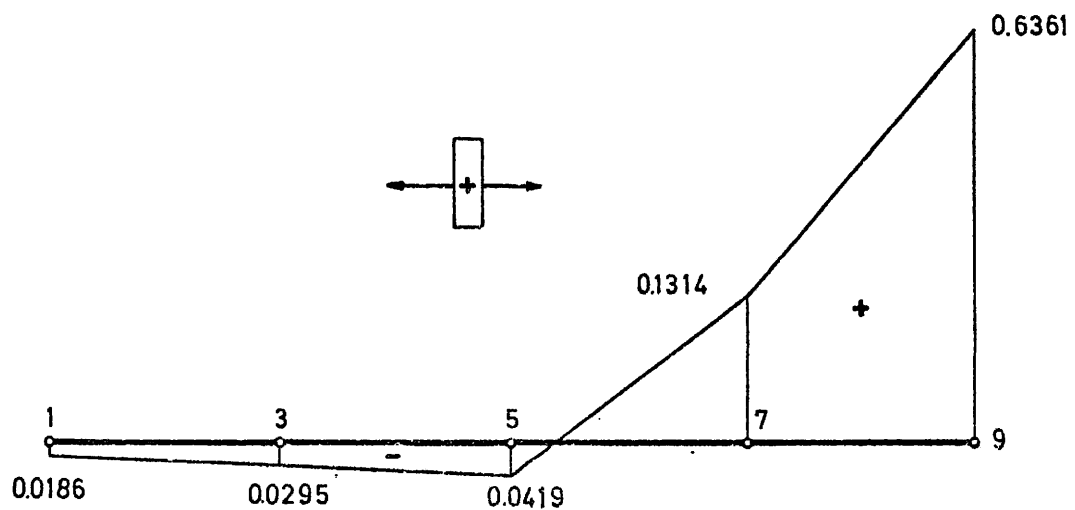


Fig. E8.2 d

Ejercicio E11.1.

Dada la pieza 1-2 de la figura E11.1a, se pide:

- a) Determinar las rigideces y coeficientes de transmisión.
- b) Hallar los momentos de empotramiento rígido en sus extremos producidos por:
 - 1) Carga uniforme de valor P .
 - 2) Carga puntual P aplicada en el centro del vano.
 - 3) Carga puntual P aplicada a un cuarto de luz del extremo 1.

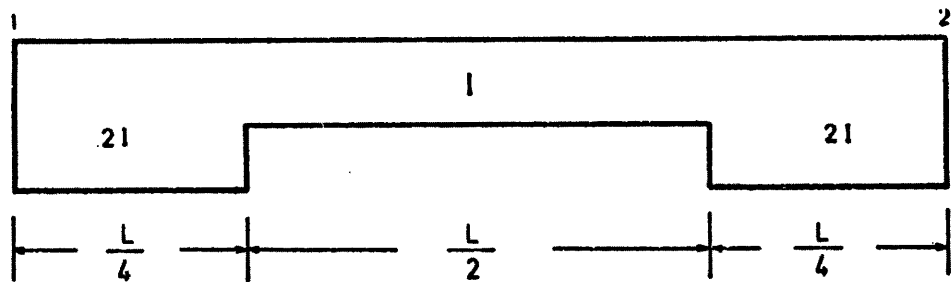


Fig. E11.1a

Si se consideran los casos de carga simétrica y antisimétrica y sus respectivas conjugadas (figuras E11.1b, E11.1c, E11.1d y E11.1e) se tiene:

$$\theta_s = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2EI} \cdot \frac{L}{4} \cdot 2 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{L}{2} \right) = \frac{3L}{8EI}; R_s = \frac{1}{\theta_s}; R_s = \frac{8EI}{3L}$$

$$\theta_A \cdot \frac{L}{2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2EI} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2EI} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{4} - \frac{1}{2} \right.$$

$$\left. \cdot \frac{1}{4EI} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{4} \right) = \frac{3L^2}{64EI}; R_A = \frac{1}{\theta_A}; R_A = \frac{32EI}{3L}$$

y las rigideces y transmisiones se deducen como sigue:

$$\begin{aligned} R_s &= R(1-\gamma) \\ R_A &= R(1+\gamma) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} R &= \frac{R_A + R_s}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{40EI}{3L} = \frac{20EI}{3L} \\ \gamma &= \frac{R_A}{R} - 1 = \frac{32}{20} - 1 = \frac{3}{5} \end{aligned} \right. \left\{ \begin{aligned} R_1 &= R_2 = \frac{20EI}{3L} \\ \gamma_{12} &= \gamma_{21} = \frac{3}{5} \end{aligned} \right.$$

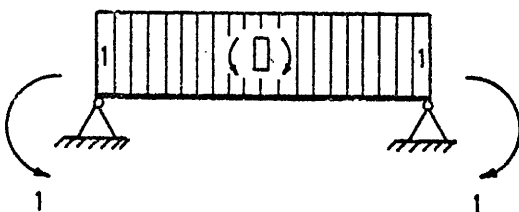


Fig.E11.1b.- Carga simetrica

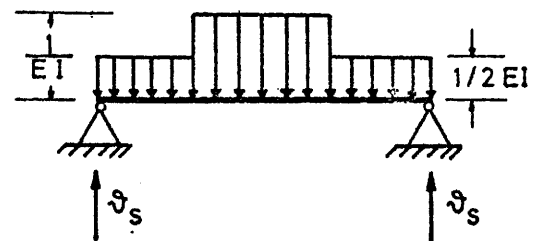


Fig.E11.1c.- Viga conjugada de la carga simétrica

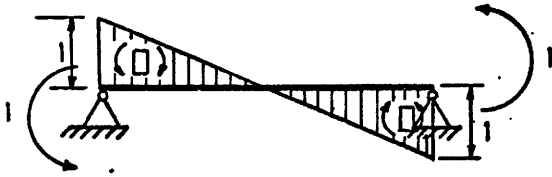


Fig.E11.1d.- Carga antimétrica

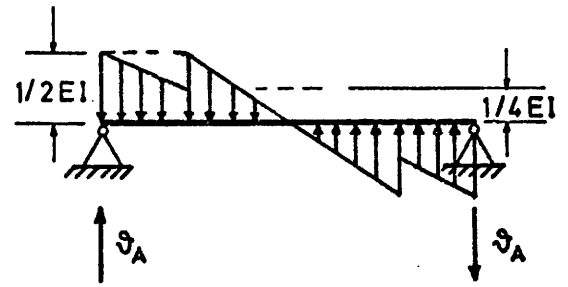


Fig. E11.1e.- Viga conjugada de la carga antimétrica

b) Cualquier estado de cargas se puede descomponer en los estados que se indican en la figura E11.1f. Entonces - los momentos de empotramiento se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}\hat{M}_1 &= R_1 \theta_1 - \gamma_{21} R_2 \theta_2 \\ \hat{M}_2 &= + \gamma_{12} R_1 \theta_1 - R_2 \theta_2\end{aligned}\quad (E11.1a)$$

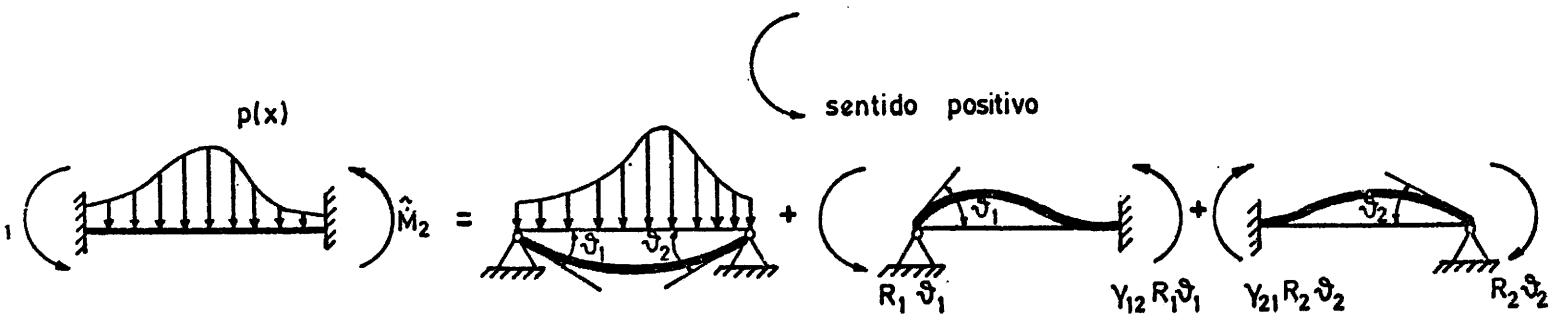


Fig. E11.1f.- Descomposicion de un estado de cargas

b-1) Para el caso de carga uniforme se tiene la ley de momentos y la viga conjugada de las figuras E11.1g y 11.1h.

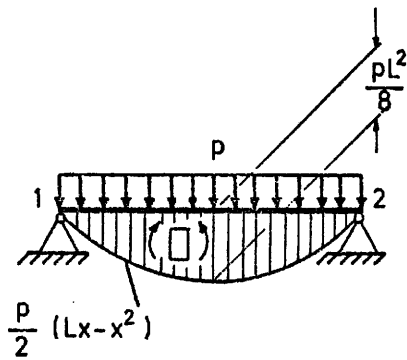


Fig. E11.1g.- Ley de flectores para carga uniforme

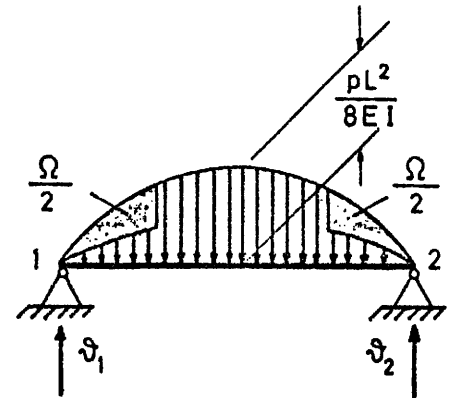


Fig. E11.1h.- Viga conjugada para carga uniforme

El área de carga en la viga conjugada es:

$$\text{Area} = A = \frac{2}{3} \cdot L \cdot \frac{PL^2}{8EI} = 2 \cdot \frac{\Omega}{2}$$

$$\Omega = \frac{P}{2EI} \int_0^L (Lx - x^2) dx = \frac{5}{6} \cdot \frac{PL^3}{64EI}; \quad A = \frac{PL^3}{12EI} - \frac{5PL^3}{384EI}$$

De donde se obtienen θ_1 y θ_2 ;

$$|\theta_1| = |\theta_2| = \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{PL^3}{12EI} - \frac{5PL^3}{384EI} \right); \quad |\theta_1| = |\theta_2| = \frac{9PL^3}{256EI}$$

y aplicando la fórmula (E11.1a) se tiene:

$$|\hat{M}_1| = |\hat{M}_2| = \frac{20EI}{3L} \cdot \frac{9PL^3}{256EI} \left(1 - \frac{3}{5} \right)$$

$$\hat{M}_1 = \frac{3}{32} PL^2 = -\hat{M}_2$$

b-2) En el caso de carga puntual en el centro del vano se resuelve de la misma forma. En las figuras E11.1i y E11.1j se indican la ley de momentos flectores y la viga conjugada respectiva.

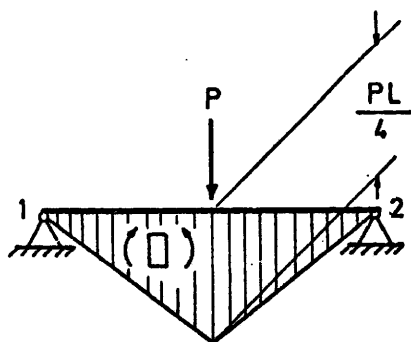


Fig. E11.1i

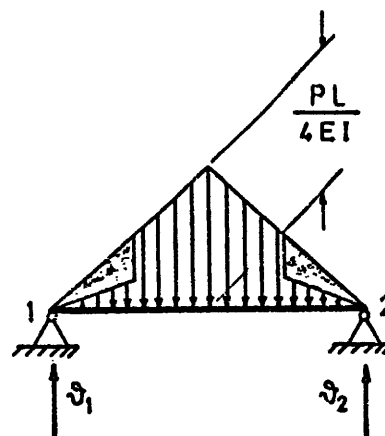


Fig. E11.1j

Ley de momentos flectores para carga puntual en el centro del vano.

Viga conjugada para carga puntual en el centro del vano.

El área de carga en la viga conjugada es:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} L \cdot \frac{PL}{4EI} - \frac{1}{2} \frac{L}{4} \cdot \frac{PL}{8EI} = \frac{7PL^2}{64EI}$$

de donde se obtiene:

$$|\theta_1| = |\theta_2| = \frac{7PL^2}{128EI}$$

$$|\hat{M}_1| = |\hat{M}_2| = \frac{20EI}{3L} \cdot \frac{7PL^2}{128EI} \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{7}{48} PL$$

$$\hat{M}_1 = \frac{7PL}{48} = -\hat{M}_2$$

b-3) Del mismo modo que los anteriores se resuelve el caso de carga puntual aplicada a un cuarto de luz del extremo 1.

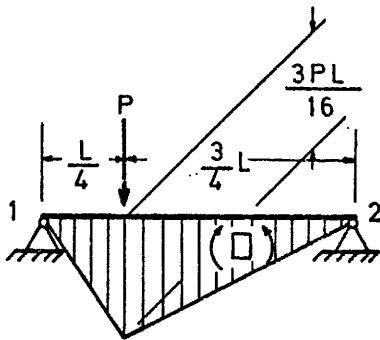


Fig. E11.1k

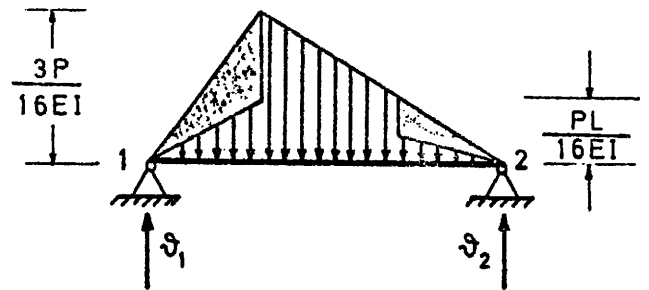


Fig. E11.1l

Ley de momentos flectores para carga puntual a $\frac{L}{4}$ del extremo 1 Viga conjugada para carga puntual a $\frac{L}{4}$ del extremo 1

$$\text{Area} = A = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \frac{3PL}{16EI} - \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{3PL}{32EI} - \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{PL}{32EI} =$$

$$= \frac{PL}{32EI} \left(3 - \frac{3}{8} - \frac{1}{8}\right) = \frac{20PL^2}{8 \cdot 32EI}$$

$$\text{Area} = A = \frac{5PL^2}{64EI}$$

Para hallar θ_1 se toman momentos respecto al extre-

mo 2 y se tiene:

$$\Sigma M \text{ (respecto a 2) } = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{3PL}{32EI} \left(\frac{3L}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3L}{4} \cdot \frac{3PL}{16EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3L}{L} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot$$

$$\cdot \frac{PL}{32EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{4} = \theta_1 L$$

$$|\theta_1| = \frac{17PL^2}{384EI} ; |\theta_2| = \Delta - |\theta_1| = \frac{13PL^2}{384EI}$$

$$\hat{M}_1 = \frac{20EI}{3L} \left(\frac{17PL^2}{384EI} - \frac{3}{5} \cdot \frac{13PL^2}{384EI} \right) = \frac{23PL}{144} ; \hat{M}_1 = \frac{23PL}{144}$$

$$\hat{M}_2 = \frac{20EI}{3L} \left(-\frac{13PL^2}{384EI} + \frac{3}{5} \cdot \frac{17PL^2}{384EI} \right) = -\frac{7PL}{144} ; \hat{M}_2 = -\frac{7PL}{144}$$

Ejercicio E11.2.

a) Determinar los coeficientes de transmisión γ_{12} y γ_{21} y las rigideces R_1 y R_2 de la pieza que se indica en la figura E11.2a.

Se supone:

$$EI_1 = 1 \text{ t.m}^2 ; L = 1 \text{ m}; \frac{I_2}{I_1} = \frac{K}{100}$$

siendo K las dos últimas cifras del número del alumno.

La sección de la pieza es rectangular, con variación lineal del canto.

b) En la pieza anterior, hallar los momentos de empotramiento rígido en los extremos 1 y 2, en los siguientes casos de actuación de cargas:

1. Carga uniforme vertical de 1 T.m^{-1} .
2. Carga puntual en el centro de la luz.

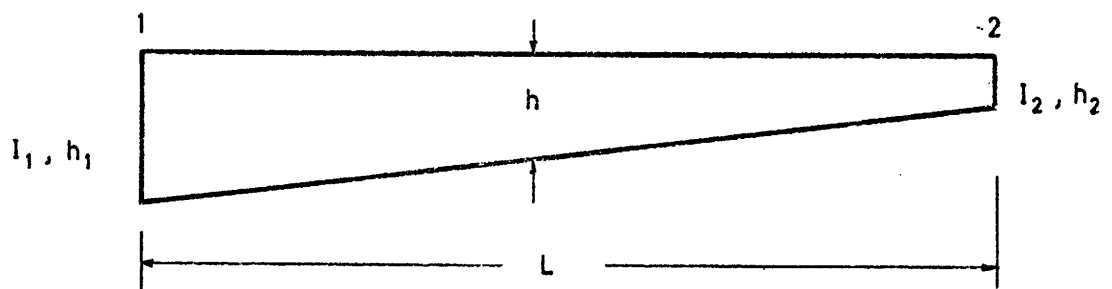


Fig. E 11. 2 a

Para la resolución de este ejercicio se tomará

$K = 10$.

a) Para no efectuar la integración exacta se divide la viga en tramos de 0,10 metros como se indica en la figura - E11.2b.

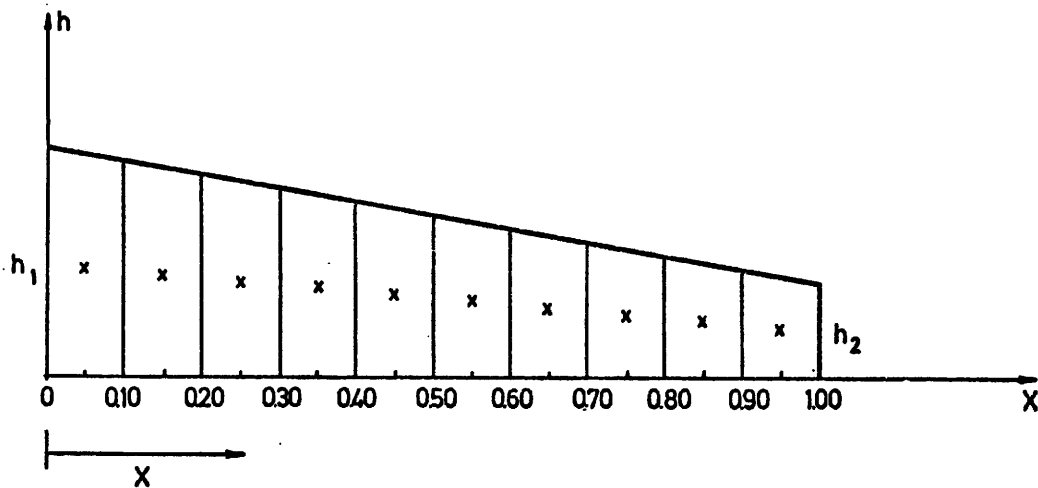


Fig. E11.2 b

Los f_{ij} serán:

$$f_{11} = \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \cdot \frac{1}{EI(x)} dx; \quad f_{12} = f_{21} = \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} \cdot \frac{1}{EI(x)} dx;$$

$$f_{22} = \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 \cdot \frac{1}{EI(x)} dx$$

los valores de las funciones subintegrales se tomarán cons-

tantes e iguales al valor que tengan en el centro de cada d6vela.

$$h(x) = \frac{h_2 - h_1}{L} x + h_1; EI(x) = E \cdot \frac{1}{12} b \left\{ \frac{h_2 - h_1}{L} x + h_1 \right\}^3;$$

$$\text{para } x = 0: EI_1 = E \cdot \frac{1}{12} b h_1^3 = 1$$

$$\text{para } x = L: EI_2 = E \cdot \frac{1}{12} b h_2^3 = \frac{1}{10}$$

$$\frac{h_1^3}{h_2^3} = 10; h_1 = \sqrt[3]{10} h_2; h_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{10}} h_1$$

$$EI(x) = E \cdot \frac{1}{12} b h_1^3 \left\{ \frac{x}{L} \left(\frac{1}{3} \frac{1}{10} - 1 \right) + 1 \right\}^3 = \left\{ \frac{x}{L} \left(\frac{1}{3} \frac{1}{10} - 1 \right) + 1 \right\}^3$$

El c6lculo ordenado se efectúa en la tabla E11.2a.

Tabla E11.2a

	(1)	(2)	(3)	(4)						
x/L	$1 - \frac{x}{L}$	$(x/L)^2$	$(1 - \frac{x}{L})^2$	$\frac{x}{L}(1 - \frac{x}{L})$	$EI(x)$	$\frac{1}{EI(x)}$	(1) . (4)	(2) . (4)	(3) . (4)	$\Delta_x = 0,10$
0,05	0,95	0,0025	0,9025	0,0475	0,9281	1,085	0,00271	0,97921	0,05154	
0,15	0,85	0,0225	0,7225	0,1275	0,7777	1,286	0,02893	0,92913	0,16396	
0,25	0,75	0,0625	0,5625	0,1875	0,6496	1,540	0,09625	0,86625	0,28875	
0,35	0,65	0,1225	0,4225	0,2275	0,5363	1,865	0,22846	0,78796	0,42429	
0,45	0,55	0,2025	0,3025	0,2475	0,4370	2,288	0,46332	0,69212	0,56628	
0,55	0,45	0,3025	0,2025	0,2475	0,3508	2,850	0,86212	0,57712	0,70537	
0,65	0,35	0,4225	0,1225	0,2275	0,2768	3,613	1,52649	0,44259	0,82196	
0,75	0,25	0,5625	0,0625	0,1875	0,2140	4,673	2,62856	0,29206	0,87619	
0,85	0,15	0,7225	0,0225	0,1275	0,1615	6,193	4,47444	0,13934	0,78961	
0,95	0,05	0,9025	0,0025	0,0475	0,1183	8,451	7,62703	0,02113	0,40142	
Σ							17,94	5,73	5,09	

S₅ 1,49

S₆ 3,59

Con los resultados anteriores se puede escribir:

$$f_{11} = 0,573$$

$$f_{12} = f_{21} = 0,509$$

$$f_{22} = 1,794$$

Cálculo de las rigideces y factores de transmisión:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = 0,7689$$

$$R_1 = \frac{f_{22}}{\Delta} = \frac{1,794}{0,7689} = 2,33; \quad R_2 = \frac{0,573}{0,7689} = 0,74$$

$$\gamma_{12} = \frac{f_{12}}{f_{22}} = \frac{0,509}{1,794} = 0,28; \quad \gamma_{21} = \frac{f_{21}}{f_{11}} = \frac{0,509}{0,573} = 0,89$$

$$R_1 = 2,33 \quad \gamma_{12} = 0,28; \quad R_2 = 0,74; \quad \gamma_{21} = 0,89$$

b) Momentos de empotramiento rígido.

Teniendo en cuenta la figura E11.1f se puede escribir:

$$\hat{M}_2 = -R_2 \theta_2 + \gamma_{12} R_1 \theta_1$$

b.1) Carga uniforme vertical de 1 T/m.

En este caso se tiene (ver figuras E11.2d y E11.1f).

$$\hat{M}_1^1 = R_1 \theta_1^1 - \gamma_{21} R_2 \theta_2^1; \quad \hat{M}_2^1 = -R_2 \theta_2^1 + \gamma_{12} R_1 \theta_1^1$$

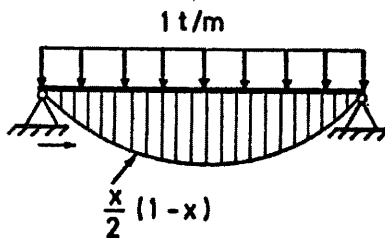


Fig. E11.2d.- Ley de momentos flectores para carga uniforme de 1 T/m

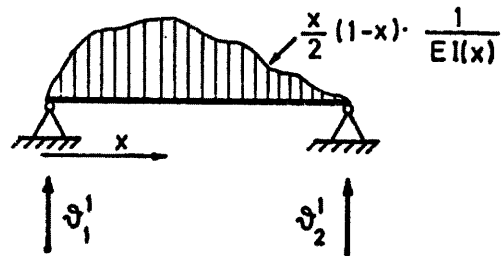


Fig. E11.2e.- Viga conjugada para la carga uniforme de 1 T/m

$$\frac{x}{2}(1-x) \cdot \frac{dx}{EI(x)} \cdot x = d \theta_2^1 \cdot 1; \quad \theta_2^1 = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2(1-x) \cdot \frac{1}{EI(x)} dx$$

$$\frac{x}{2}(1-x) \cdot \frac{dx}{EI(x)} \cdot (1-x) = d \theta_1^1 = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 \cdot \frac{1}{EI(x)} dx$$

La integración numérica se realiza en la tabla E11.2b.

b.2) Carga puntual unidad en el centro de la luz:

Análogamente se puede escribir (ver figuras E11.2f y E11.2g):

$$\hat{M}_1^2 = R_1 \theta_1^2 - \gamma_{21} R_2 \theta_2^2; \quad \hat{M}_2^2 = -R_2 \theta_2^2 + \gamma_{12} R_1 \theta_1^2$$

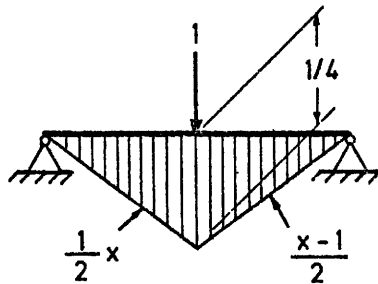


Fig. E 11.2 f.- Ley de momentos flectores para carga unidad en el centro del vano

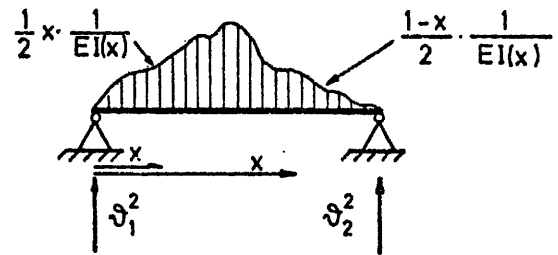


Fig. E 11.2 g.- Viga conjugada para carga unidad en el centro del vano

$$\frac{1}{2} x \cdot \frac{dx}{EI(x)} \cdot x = d \theta_2^2 \cdot 1 \quad (x < 0,5)$$

$$\frac{1-x}{2} \cdot \frac{dx}{EI(x)} \cdot x = d \theta_2^2 \cdot 1 \quad (x > 0,5)$$

$$\frac{1}{2} x \cdot \frac{dx}{EI(x)} \cdot (1-x) = d \theta_1^2 \cdot 1 \quad (x < 0,5)$$

$$\frac{1-x}{2} \cdot \frac{dx}{EI(x)} \cdot (1-x) = d \theta_1^2 \cdot 1 \quad (x > 0,5)$$

$$\theta_1^2 = \frac{1}{2} \int_0^{0,5} x (1-x) \cdot \frac{1}{EI(x)} dx + \frac{1}{2} \int_{0,5}^1 (1-x)^2 \cdot \frac{1}{EI(x)} dx$$

$$\theta_2^2 = \frac{1}{2} \int_0^{0,5} x^2 \cdot \frac{1}{EI(x)} dx + \frac{1}{2} \int_{0,5}^1 x (1-x) \cdot \frac{1}{EI(x)} dx$$

La integración numérica se realiza en la tabla E11.2b.

Tabla E11.2b

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)							
x	1-x	x ²	(1-x) ²	x ² (1-x)	x(1-x) ²	x(1-x)	$\frac{1}{EI(x)}$	(1) . (6)	(2) . (6)	(3) . (6)	(4) . (6)	(5) . (6)	$\Delta_x=0,10$
0,05	0,95	0,0025	0,9025	0,00237	0,04512	0,0475	1,085	0,00271		0,00257	0,04896	0,05154	
0,15	0,85	0,0225	0,7225	0,01912	0,10837	0,1275	1,286	0,02893		0,02459	0,13936	0,16396	
0,25	0,75	0,0625	0,5625	0,04687	0,14068	0,1875	1,540	0,09625		0,07218	0,21655	0,28875	
0,35	0,65	0,1225	0,4225	0,07962	0,14787	0,2275	1,865	0,22846		0,14849	0,27578	0,42429	
0,45	0,55	0,2025	0,3025	0,11137	0,13612	0,2475	2,288	0,46332		0,25481	0,31144	0,56628	S ₅ 1,49
0,55	0,45	0,3025	0,2025	0,13612	0,11137	0,2475	2,850		0,57712	0,38794	0,31740	0,70537	
0,65	0,35	0,4225	0,1225	0,14787	0,07962	0,2275	3,613		0,44259	0,53425	0,28767	0,82196	
0,75	0,25	0,5625	0,0625	0,14062	0,04687	0,1875	4,673		0,29206	0,65712	0,21902	0,87619	
0,85	0,15	0,7225	0,0225	0,10837	0,01912	0,1275	6,193		0,13934	0,67114	0,11841	0,78961	
0,95	0,05	0,9025	0,0025	0,04512	0,00237	0,0475	8,451		0,02113	0,38131	0,02003	0,40142	S ₆ 3,59
Σ								S ₁ 0,82	S ₂ 1,47	S ₃ 3,13	S ₄ 1,95		

Teniendo en cuenta los resultados de la tabla anterior, resulta:

$$\theta_1^2 = \frac{1}{2} s_5 \cdot 0,10 + \frac{1}{2} s_2 \cdot 0,10 = 0,148$$

$$\theta_2^2 = \frac{1}{2} s_1 \cdot 0,10 + \frac{1}{2} s_6 \cdot 0,10 = 0,2205$$

$$\theta_1^1 = \frac{1}{2} s_4 \cdot 0,10 = 0,0975$$

$$\theta_2^1 = \frac{1}{2} s_3 \cdot 0,10 = 0,1565$$

$$\hat{M}_1^1 = 2,33 \cdot 0,0975 - 0,89 \cdot 0,74 \cdot 0,1565 = 0,13 \text{ m} \cdot \text{t} ;$$

$$\hat{M}_1^1 = 0,13 \text{ m} \cdot \text{t}$$

$$\hat{M}_2^1 = -0,74 \cdot 0,1565 + 0,28 \cdot 2,33 \cdot 0,0975 = -0,05 \text{ m} \cdot \text{t} ;$$

$$\hat{M}_2^1 = -0,05 \text{ m} \cdot \text{t}$$

$$\hat{M}_1^2 = 2,33 \cdot 0,148 - 0,89 \cdot 0,74 \cdot 0,2205 = 0,20; \hat{M}_1^2 = 0,2 \text{ m} \cdot \text{t}$$

$$\hat{M}_2^2 = -0,74 \cdot 0,2205 + 0,28 \cdot 2,33 \cdot 0,148 = -0,07; \hat{M}_2^2 = -0,07 \text{ m} \cdot \text{t}$$

Ejercicio E11.3.

La barra a-b de la figura E11.3a es una pieza de sección variable y de longitud 7 m.

Se sabe, cuando está articulada en a y empotrada en b, que al darle un descenso de un extremo respecto al otro de 1 cm aparece un giro en a, $\theta_a = 2 \cdot 10^{-4}$ radianes y un momento en b, $M_b = -4$ mt.

Si la suponemos biapoyada en a y b, al introducir un momento en a de 10 mt, aparece un giro en ese extremo -- $\theta_a = 4 \cdot 10^{-4}$ radianes.

Calcular las rigideces y coeficientes de transmisión de la pieza a-b.

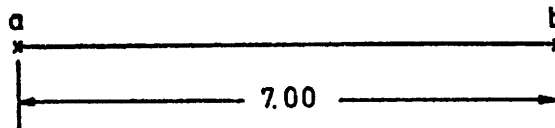


Fig. E 11. 3 a

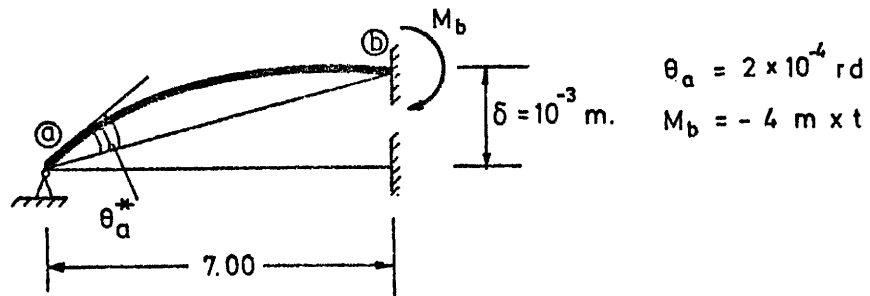


Fig. E11.3b

Considerando la figura E11.3b se tiene:

$$\left. \begin{aligned} M_a &= R_a \theta_a^* + \gamma_{ba} R_b \theta_b \\ M_b &= \gamma_{ab} R_a \theta_a^* + R_b \theta_b \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \theta_b &= -\frac{\delta}{L} = -\frac{10^{-3}}{7} \\ \theta_a^* &= 2 \cdot 10^{-4} - \frac{10^{-3}}{7} = \frac{4}{7} 10^{-4} \end{aligned}$$

$$0 = R_a \frac{4}{7} 10^{-4} - \gamma_{ba} R_b \frac{10}{7} 10^{-4} \quad \{E11.3a.\}$$

$$\boxed{-4 = R_a \gamma_{ab} \frac{4}{7} 10^{-4} - R_b \frac{10}{7} 10^{-4}} \quad \{E11.3b.\}$$

de {E11.3a.} se tiene:

$4R_a = 10R_b \gamma_{ba}$ Y como $\gamma_{ab} R_a = \gamma_{ba} R_b$ se tiene:

$$4R_a = 10 R_a \gamma_{ab} ;$$

$$\boxed{\gamma_{ab} = \frac{2}{5} = 0,4}$$

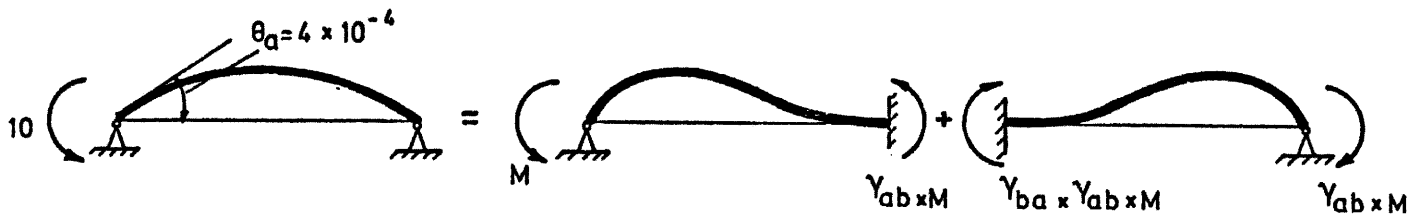


Fig. E11.3 c

Considerando la figura E11.3c se tiene:

$$M - 0,4 \gamma_{ba} M = 10; \quad M(1 - 0,4 \gamma_{ba}) = 10$$

$$\frac{M}{R_a} = 4 \cdot 10^{-4} \rightarrow M = 4 \cdot 10^{-4} R_a$$

$$4 \cdot 10^{-4} R_a (1 - 0,4 \gamma_{ba}) = 10 \quad \{E11.3c.\}$$

$$\text{A partir de \{E11.3b.\}: } -28 \cdot 10^4 = 1,6 R_a - 10 R_b$$

$$\text{A partir de \{E11.3a.\}: } R_b = \frac{4}{10} R_a \frac{1}{\gamma_{ba}}$$

$$-28 \cdot 10^4 = 1,6 R_a - 4 R_a \frac{1}{\gamma_{ba}}$$

$$-28 \cdot 10^4 = R_a \left(1,6 - \frac{4}{\gamma_{ba}}\right) \quad \{E11.3d.\}$$

A partir de {E11.3d.} y {E11.3c.}:

$$R_a = \frac{10 \cdot 10^4}{4(1-0,4 \gamma_{ba})} = \frac{-28 \cdot 10^4 \cdot \gamma_{ba}}{+4 (0,4 \gamma_{ba} - 1)} = \frac{28 \cdot 10^4 \cdot \gamma_{ba}}{4 (1-0,4 \gamma_{ba})} \rightarrow$$

$$\rightarrow \gamma_{ba} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} \qquad \gamma_{ba} = 0,36$$

$$R_a = \frac{10 \cdot 10^4}{4(1-0,4 \frac{5}{14})} = \frac{10 \cdot 10^4}{4(1-\frac{1}{7})} = \frac{70 \cdot 10^4}{24} = \frac{35}{12} 10^4 = 29167$$

$$R_b = \frac{4}{10} \frac{14}{5} \frac{35}{12} 10^4 = \frac{98}{3} 10^3 = 32667$$

Los resultados son, pues:

$R_a = 29167 \text{ m.t}; \quad R_b = 32667 \text{ m.t}; \quad \gamma_{ab} = 0,4; \quad \gamma_{ba} = 0,36$

Ejercicio E11.4.

La barra ab de la figura E11.4a es una pieza recta de sección variable.

Se sabe que cuando está articulada en sus extremos y se aplica un momento de 4 m.T en "b" los giros en "a" y "b" son $\theta_A = -2 \cdot 10^{-4}$ radianes y $\theta_B = 3 \cdot 10^{-4}$ radianes.

Si se aplica el mismo momento en el extremo "a" el giro de ese extremo es $\theta_a = 4 \cdot 10^{-4}$ radianes.

Cuando se aplica una carga uniforme de 1Tm/ml los giros en los extremos "a" y "b" son $\theta_a = -1 \cdot 10^{-4}$ radianes y $\theta_b = 0,75 \cdot 10^{-4}$ radianes.

SE PIDE:

Determinar los coeficientes de rigidez y transmisión y los momentos de empotramiento, para una sobrecarga uniforme de 5 Tn/ml., en los extremos de la pieza.



Fig. E11.4 a



Fig. E11. 4 b

$$\theta_A = -2 \cdot 10^{-4} \text{ rd.}$$

$$\theta_B = 3 \cdot 10^{-4} \text{ rd.}$$

$$M - \gamma_{ab} \cdot \gamma_{ba} \cdot M = 4 \rightarrow M(1 - \gamma_{ab} \cdot \gamma_{ba}) = 4 \rightarrow M = \frac{4}{1 - \gamma_{ab} \cdot \gamma_{ba}}$$

$$\frac{M}{R_b} = 3 \cdot 10^{-4} \rightarrow \frac{4}{R_b(1 - \gamma_{ab} \cdot \gamma_{ba})} = 3 \cdot 10^{-4} \quad \{\text{E11.4a.}\}$$

$$\frac{M \cdot \gamma_{ba}}{R_a} = 2 \cdot 10^{-4}; \quad \frac{4 \gamma_{ba}}{R_a(1 - \gamma_{ab} \gamma_{ba})} = 2 \cdot 10^{-4} \quad \{\text{E11.4b.}\}$$



Fig. E 11. 4 c

$$M' (1 - \gamma_{ab} \gamma_{ba}) = 4 \rightarrow M' = \frac{4}{1 - \gamma_{ab} \gamma_{ba}}$$

$$\frac{M'}{R_a} = 4 \cdot 10^{-4} \rightarrow \frac{1}{R_a (1 - \gamma_{ab} \gamma_{ba})} = 4 \cdot 10^{-4} \quad \{E11.4c.\}$$

$$\text{Además } R_a \gamma_{ab} = R_b \gamma_{ba} \quad \{E11.4d.\}$$

$$R_a (1 - \gamma_{ab} \gamma_{ba}) = 10^4 \quad \{E11.4c.\}$$

$$\text{De } \{E11.4c\} \text{ y } \{E11.4a\} \quad \frac{R_a}{3R_b} = \frac{1}{4}$$

$$3R_b (1 - \gamma_{ab} \gamma_{ba}) = 4 \cdot 10^4 \quad \{E11.4a.\}$$

$$\rightarrow R_b = \frac{4}{3} R_a$$

$$R_a (1 - \gamma_{ab} \gamma_{ba}) = 2 \cdot 10^4 \cdot \gamma_{ba} \quad \{E11.4b.\}$$

$$\text{De } \{E11.4c\} \text{ y } \{E11.4b\}: 1 = 2\gamma_{ba}$$

$$\text{De } \{E11.4d.\}: R_a \cdot \gamma_{ab} = \frac{4}{3} R_a \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\boxed{\gamma_{ba} = \frac{1}{2}}$$

$$\text{De } \{E11.4c.\}: R_a (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}) = 10^4; \quad R_a \cdot \frac{2}{3} = 10^4$$

$$\boxed{\gamma_{ab} = \frac{2}{3}}$$

$$R_b = \frac{4}{3} R_a = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} 10^4 = 2 \cdot 10^4$$

$$\boxed{R_a = \frac{3}{2} \cdot 10^4}$$

$$\boxed{R_b = 2 \cdot 10^4}$$

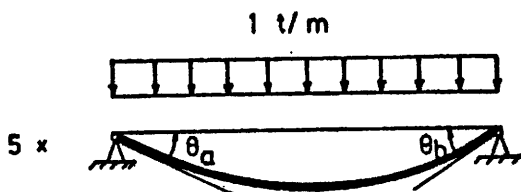


Fig. E11.4d

$$\theta_a = -1 \cdot 10^{-4} \text{ rd}; \quad \theta_a^* = 5 \cdot 10^{-4} \text{ rd.}$$

$$\theta_b = 0,75 \cdot 10^{-4} \text{ rd}; \quad \theta_b^* = -\frac{15}{4} 10^{-4} \text{ rd.}$$

$$\begin{aligned}\hat{\dot{M}}_a &= R_a \theta_a^* + \gamma_{ba} R_b \theta_b^* = \frac{3}{2} 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-4} + \frac{1}{2} 2 \cdot 10^4 \left(-\frac{15}{4} 10^{-4}\right) = \\ &= \frac{15}{2} - \frac{15}{4} = \frac{15}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\dot{M}}_b &= R_b \theta_b^* + \gamma_{ab} R_a \theta_a^* = 2 \cdot 10^4 \left(-\frac{15}{4} 10^{-4}\right) + \frac{2}{3} \frac{3}{2} 10^4 (5 \cdot 10^{-4}) = \\ &= -\frac{15}{2} + \frac{10}{2} = -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{\dot{M}}_a = 3,75 \text{ mxt}}$$

$$\boxed{\hat{\dot{M}}_b = -2,5 \text{ mxt}}$$

Ejercicio E11.5.

De una pieza recta AB que forma parte de una estructura reticulada se sabe únicamente lo siguiente:

Caso 1ª. Si se supone la pieza articulada en A y B y se aplica un momento unidad en el extremo B aparecen unos giros $w_A = -\theta_1$, y $w_B = \theta_2$ y análogamente si se aplica el momento unidad en A los giros que aparecen son: $w_A = \theta_1'$ y $w_B = -\theta_2'$.

Caso 2ª. Si se supone a la pieza articulada en A y B, y se aplica el momento unidad en el extremo B aparecen los giros $w_A = -\theta_1$ y $w_B = \theta_2$ y se supone la pieza empotrada en A y B y se da un corrimiento normal a la misma al extremo B respecto al A de valor unidad aparecen unos momentos en sus extremos de valor M_A en el extremo A y M_B en el extremo B.

SE PIDE:

a) Con los únicos datos del caso 1ª, razonar si es posible determinar los valores de las rigideces y coeficientes de transmisión para introducirlos en un cálculo de Cross.

b) Lo mismo del apartado a) con los únicos datos del caso 2^a.

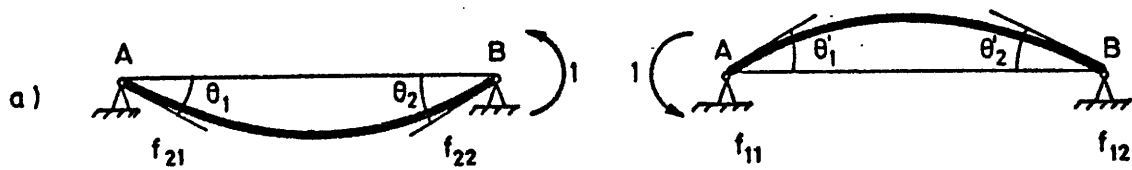


Fig. E11. 5 a

Por definición:

$$R_A = \frac{f_{22}}{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\theta_2}{\begin{vmatrix} \theta'_1 & \theta'_2 \\ \theta'_1 & \theta'_2 \end{vmatrix}} = \frac{\theta_2}{\theta'_1 \theta_2 - \theta_1 \theta'_2}; \quad \gamma_{AB} = \frac{f_{12}}{f_{22}} = \frac{\theta'_2}{\theta_2}$$

Análogamente:

$$R_B = \frac{\theta_1}{\theta'_1 \theta_2 - \theta_1 \theta'_2}; \quad \gamma_{BA} = \frac{\theta_1}{\theta'_1}$$

Por lo tanto, en este caso es posible la determinación exacta de las rigideces y transmisiones. Naturalmente -
 $\theta'_1 \theta_2 - \theta_1 \theta'_2 \neq 0$

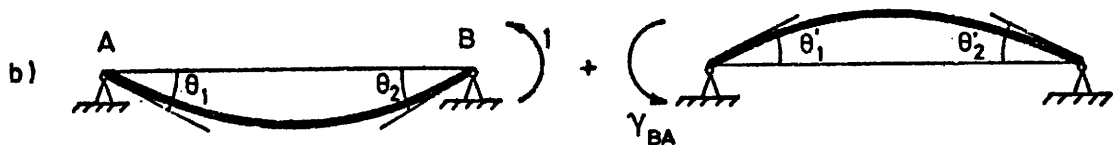


Fig. E11. 5 b

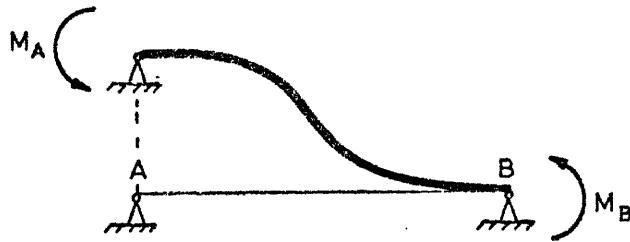


Fig. E11.5 c

De la figura (E11.5b.):

$$\theta_1 - \gamma_{BA} \theta_1' = 0 \rightarrow \theta_1' = \frac{\theta_1}{\gamma_{BA}}$$

De la figura (E11.5c.):

$$M_A = (R_A + \gamma_{BA} R_B) \frac{1}{L} \quad \{E11.5a.\}$$

$$M_B = (R_B + \gamma_{AB} R_A) \frac{1}{L} \quad \{E11.5b.\}$$

$$R_B = \frac{1}{\theta_2 - \gamma_{BA} \cdot \theta_2'}; \text{ pero, por reciprocidad } f_{12} = f_{21} \rightarrow \theta_2' = \theta_1;$$

Luego:

$$R_B (\theta_2 - \gamma_{BA} \cdot \theta_1) = 1 \quad \{E11.5c.\}; \text{ además } R_B \gamma_{BA} = R_A \cdot \gamma_{AB} \quad \{E11.5d.\}$$

Con las ecuaciones (E11.5a.), (E11.5b.), (E11.5c.) y (E11.5d.) es posible la determinación de las rigideces y transmisiones, aunque existe una incógnita más, la longitud L.

En efecto: $f_{22} = \theta_2; \quad f_{12} = \theta_1$

Por otra parte: $f_{21} = \theta_1 = f_{12}$

De las ecuaciones (E11.5a) y (E11.5b) se deduce:

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{R_A + \gamma_{BA} R_B}{R_B + \gamma_{AB} R_A}$$

Expresando las rigideces y transmisiones en función de las flexibilidades f_{11} , f_{12} , f_{21} y f_{22} se deduce la ecuación siguiente en la única incógnita f_{11} :

$$\frac{M_A f_{11} - M_B \theta_1}{M_B \theta_2 - M_A \theta_1} = 1$$

con lo que resulta:

$$f_{11} = \frac{M_B}{M_A} \theta_2 + \left(\frac{M_B}{M_A} - 1 \right) \theta_1$$

Ejercicio E13.1.

En la estructura de la figura E13.1a hallar las leyes de esfuerzos axiales, de momentos flectores y cortantes. Hallar también la reacción en el apoyo A.

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2.$$

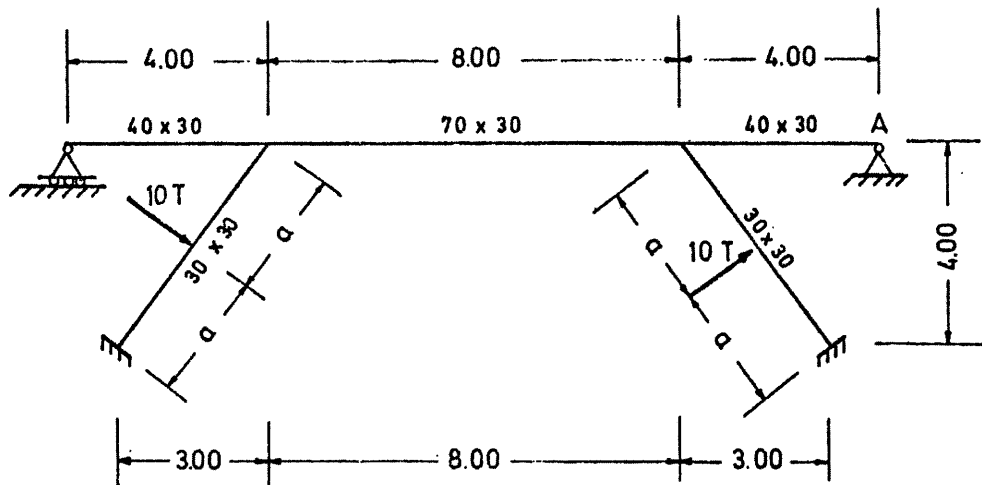


Fig. E13.1a

Los nudos se designarán como se indica en la figura E13.1b.

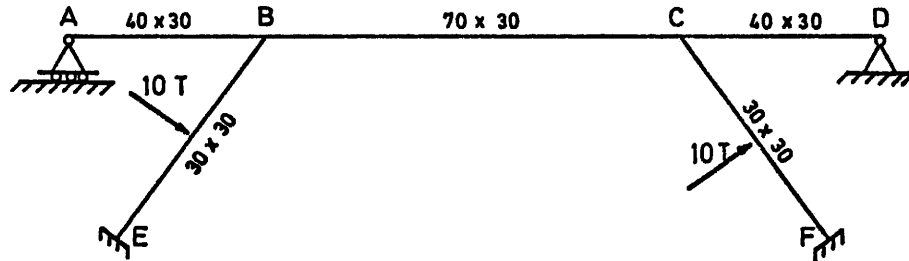


Fig. E13.1b

Las rigideces de las barras son proporcionales a:

$$R_{AB} = R_{CD} \times \frac{3}{4} \cdot \frac{4^3}{4} = 12,000$$

$$R_{BC} \times \frac{7^3}{8} = 42,875$$

$$R_{BE} = R_{CF} \times \frac{3^3}{5} = 5,40$$

Como la carga es antimétrica:

$$R'_{BC} \times 1,5 \cdot 42,875 = 64,3125$$

El nudo B es el único que se tiene que estudiar, pues los resultados en el nudo C se obtienen por antimetría. Los coeficientes de reparto en el nudo B son:

$$K_{BA} = \frac{12}{12 + 64,3125 + 5,40} = 0,15$$

$$K_{BC} = \frac{64,3125}{12 + 64,3125 + 5,40} = 0,79$$

$$K_{BE} = \frac{5,40}{12 + 64,3125 + 5,40} = 0,06$$

Y los momentos de empotramiento perfecto son:

$$\hat{M}_{BE} = -\hat{M}_{EB} = - \frac{10 \cdot 5}{8} = - 6,25 \text{ mt}$$

Con estos datos se puede efectuar el Cross que se indica en la Tabla E13.1a.

Tabla E13.1a

Nudo		B	
Barra	BC	BE	BA
γ		0,50	
R	64,31	5,40	12,00
K	0,79	0,06	0,15
\hat{M}		-6,25	
M^I	4,94	0,37	0,94
Σ	4,94	-5,88	0,94

$$M_{EB} = 6,25 + \frac{1}{2} (-5,88 + 6,25) = 6,44 \text{ m} \cdot \text{T}$$

La solución se indica en la figura E13.1c.

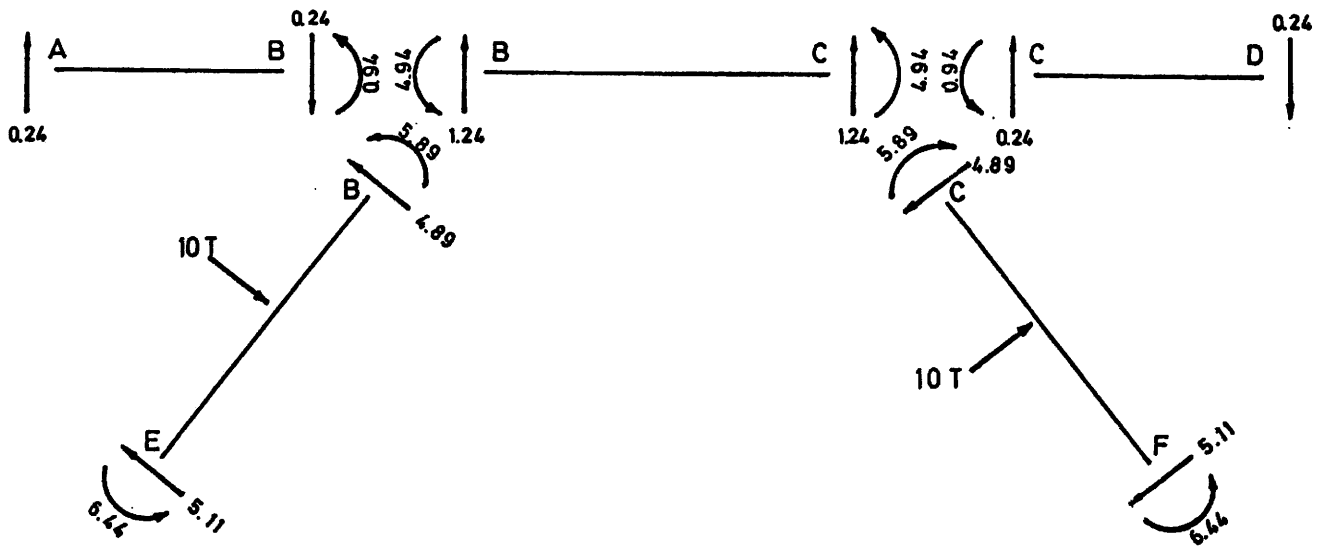


Fig. E13.1c

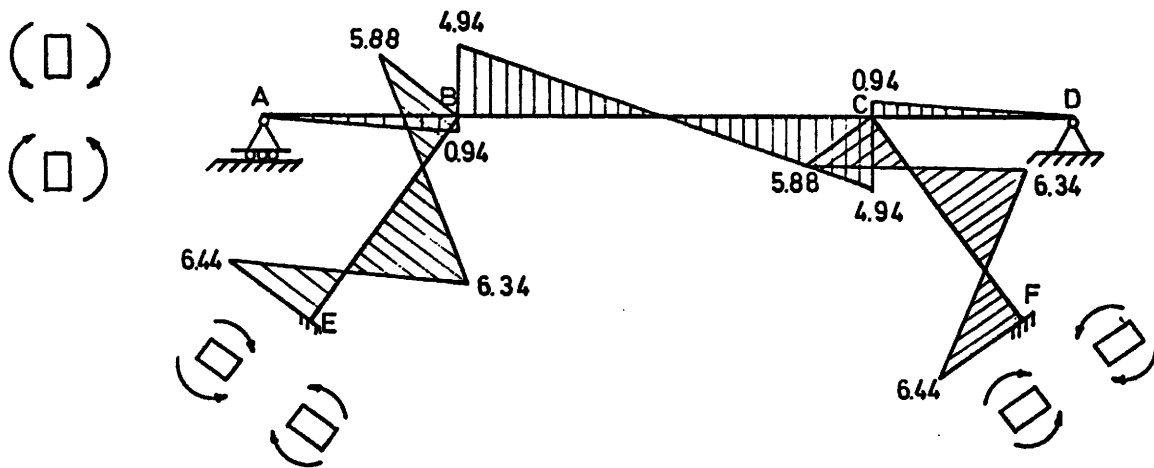


Fig. E13.1d

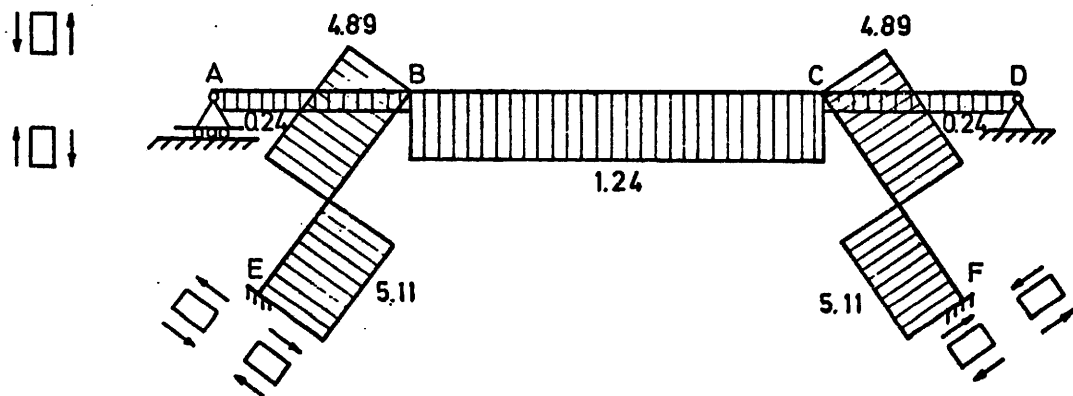


Fig. E13.1e

Para hallar las leyes de axiles hay que plantear los equilibrios de los nudos B y C ya que a efectos de axiles no hay antimetría pues no hay simetría de apoyos. (Figuras E13.1f y E13.1g).

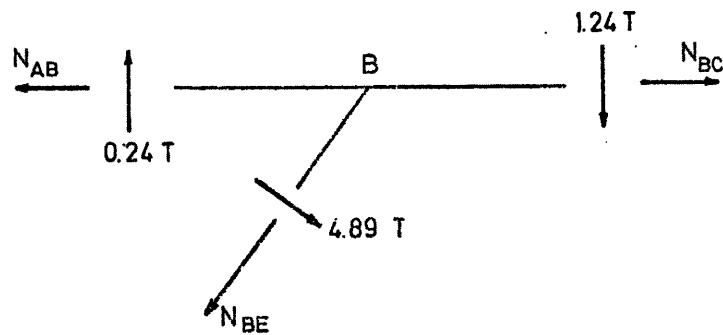


Fig. E 13.1 f

$$N_{AB} = 0$$

$$N_{BC} + 4,89 \cdot \frac{4}{5} - N_{BE} \cdot \frac{3}{5} = 0 \quad N_{BE} = -4,92 \text{ T}$$

$$0,24 - 1,24 - 4,89 \cdot \frac{3}{5} - N_{BE} \cdot \frac{4}{5} = 0 \quad N_{BC} = -6,86 \text{ T}$$

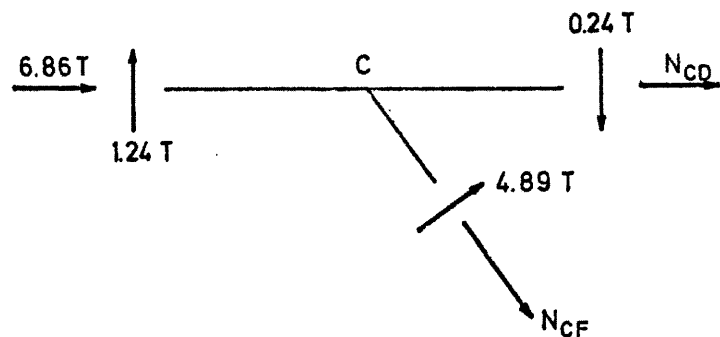


Fig. E 13.1g

$$6,86 + 4,89 \cdot \frac{4}{5} + N_{CD} + N_{CF} \cdot \frac{3}{5} = 0 \quad N_{CF} = 4,92 \text{ T}$$

$$1,24 - 0,24 + 4,89 \cdot \frac{3}{5} - N_{CF} \cdot \frac{4}{5} = 0 \quad N_{CD} = -13,72 \text{ T}$$

La ley de axiles se reproduce en la figura E13.1h.

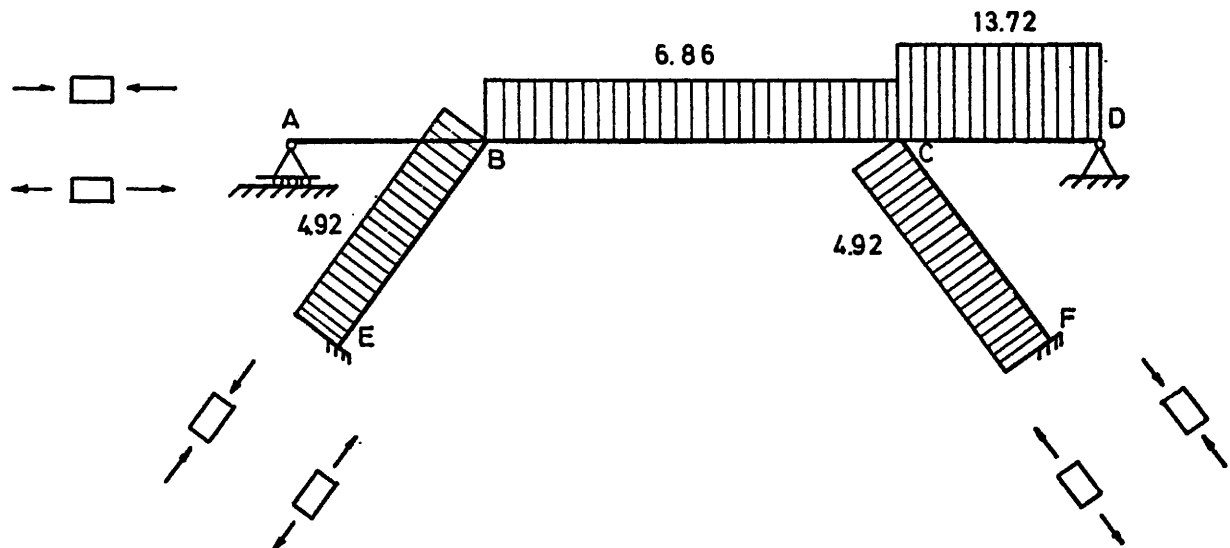


Fig. E 13.1h

La reacción en D es de 13,72 T hacia la izquierda.

Ejercicio E13.2.

En la estructura indicada en la figura E13.2a las barras horizontales tienen 0,40 m de canto y 0,30 m de ancho y las verticales son cuadradas de 0,30 m de lado. Se desprecia el peso propio.

Se pide:

- 1) Momentos flectores en extremos de barras.
- 2) Leyes de axiles a lo largo de la barra AB.
- 3) Giro en A.

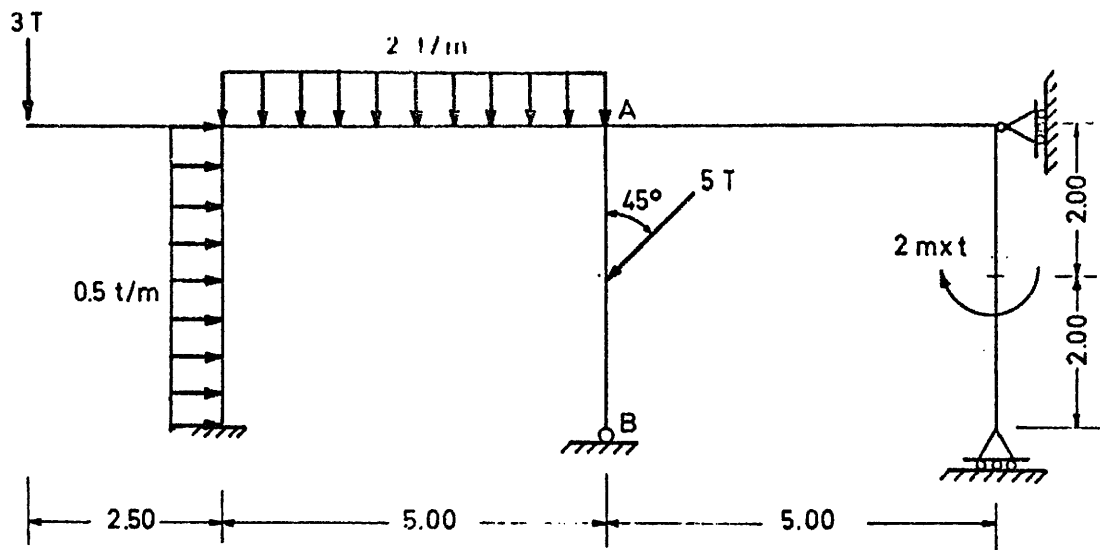


Fig. E 13.2 a

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$$

A efectos de cálculo, la estructura equivale a la indicada en la figura E13.2b.

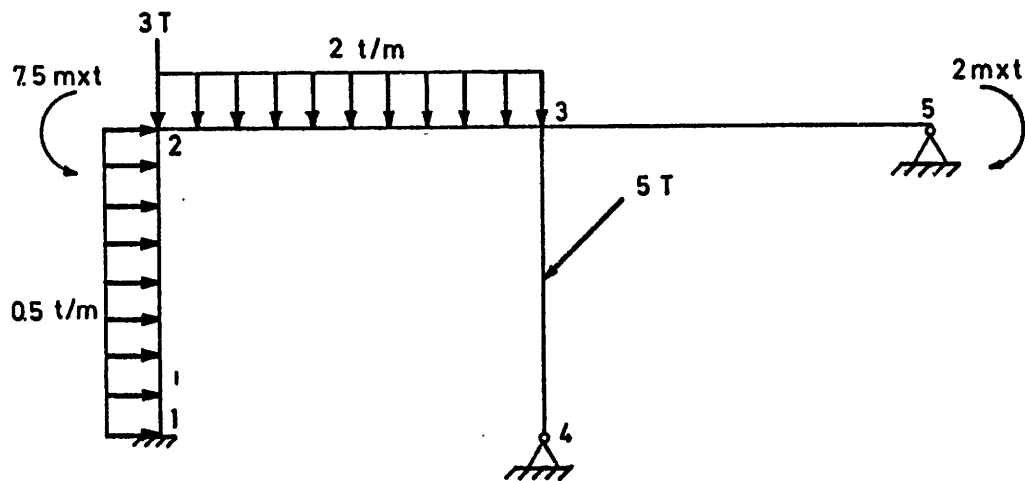


Fig. E 13.2 b

Las rigideces son

$$R_{21} = R_{12} = 4 \cdot \frac{27}{4} = 27$$

$$R_{23} = R_{32} = 4 \cdot \frac{64}{5} = 51,2$$

$$R_{34} = 3 \cdot \frac{27}{4} = 20,25$$

$$R_{35} = 3 \cdot \frac{64}{5} = 38,4$$

Los coeficientes de reparto son:

$$K_{21} = 0,35 = K_{35}; \quad K_{23} = 0,65; \quad K_{32} = 0,47; \quad K_{34} = 0,18$$

Los momentos de empotramiento perfecto debidos a las cargas actuantes son:

$$\hat{M}_{12} = -\hat{M}_{21} = 0,67; \quad \hat{M}_{23} = -\hat{M}_{32} = 4,17; \quad \hat{M}_{34} = 2,65; \quad \hat{M}_{35} = -1$$

Con estos datos se puede efectuar el cálculo de Cross de la tabla E13.2a.

	Mext = 7,5				
NUDO	2		3		
BARRA	2-1	2-3	3-2	3-4	3-5
γ	0,5	0,5	0,5		
R	27,0	51,2	51,2	20,25	38,4
K	0,35	0,65	0,47	0,18	0,35
\hat{M}	-0,67	4,17	-4,17	2,65	-1,00
M^I	1,40	2,60	1,18	0,45	0,88
M^{II}	0,00	0,59	1,30	0,00	0,00
M^{III}	-0,21	-0,38	-0,61	-0,23	-0,46
Σ	0,52	6,98	-2,30	2,87	-0,57

El resultado se expresa gráficamente en la figura E13.2c.

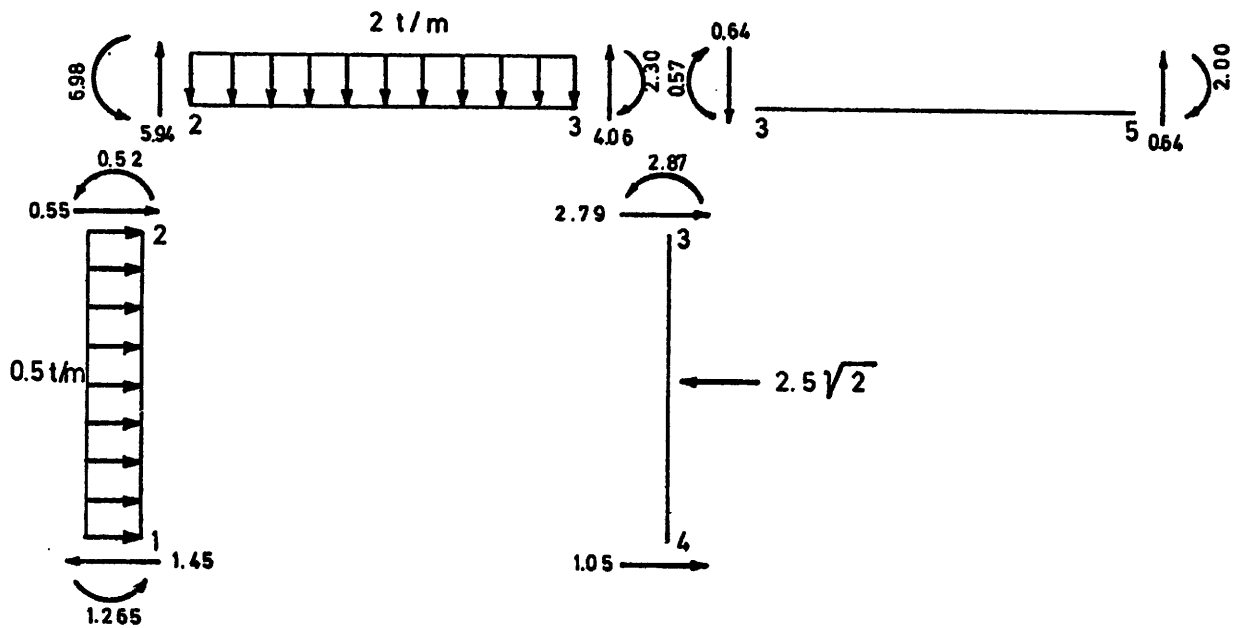


Fig. E13.2 c

Si se plantea el equilibrio del nudo 3 (figura E13.2s) se tiene que $N_{3-4} = 3,42 \text{ T}$.

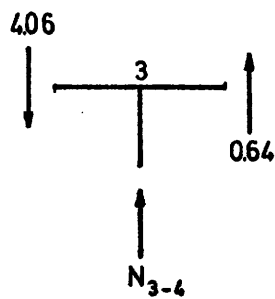
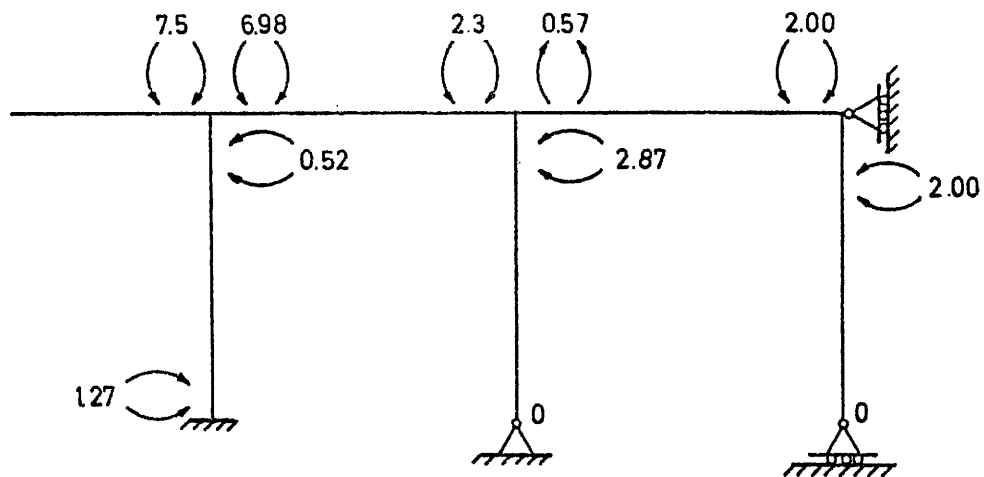


Fig. E13.2 d

1) Los momentos flectores en extremos de barras son los que se indican en la figura E13.2e.



Momentos en mxt

Fig. E13.2 e

2) La ley de axiles a lo largo de AB es la de la figura E13.2f.

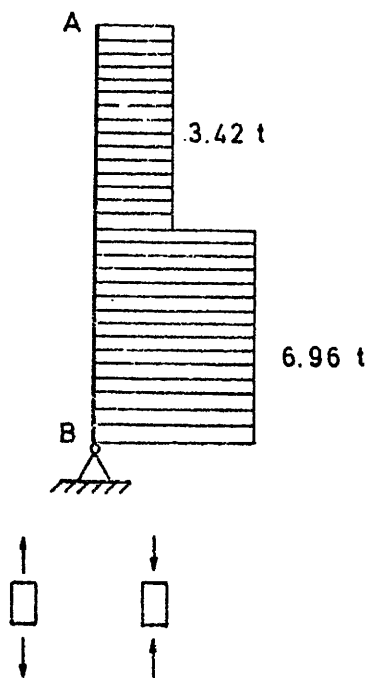


Fig. E13.2f

La rigidez de la barra 2-3 en el nudo 3 es:

$$R_{32} = 4EI/L = 4 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,3 \cdot \frac{0,4^3}{5} = 160 \text{ mxT}$$

3) El giro en A es:

$$\theta_A = \theta_{32} = \frac{\Sigma M \text{ que se reparten}}{R_{32}} = \frac{1,18 - 0,61}{160} = 0,0036 \text{ rd.}$$

$$\theta_A = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ rd}$$

Ejercicio E14.1.

En la estructura de la figura E14.1a cuando el nudo 4 sufre un descenso de 1 cm y un giro de $0,5 \cdot 10^{-2}$ radianes en sentido positivo y la barra 2-3 sufre un incremento de temperatura de 40°C , se pide:

- a) Reacciones en 1.
- b) Esfuerzos en A (punto medio del dintel 3-5).

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ ton/m}^2.$$

$$\alpha = 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}.$$

Sección de todas las barras: $0,30 \cdot 0,40 \text{ m}^2$.

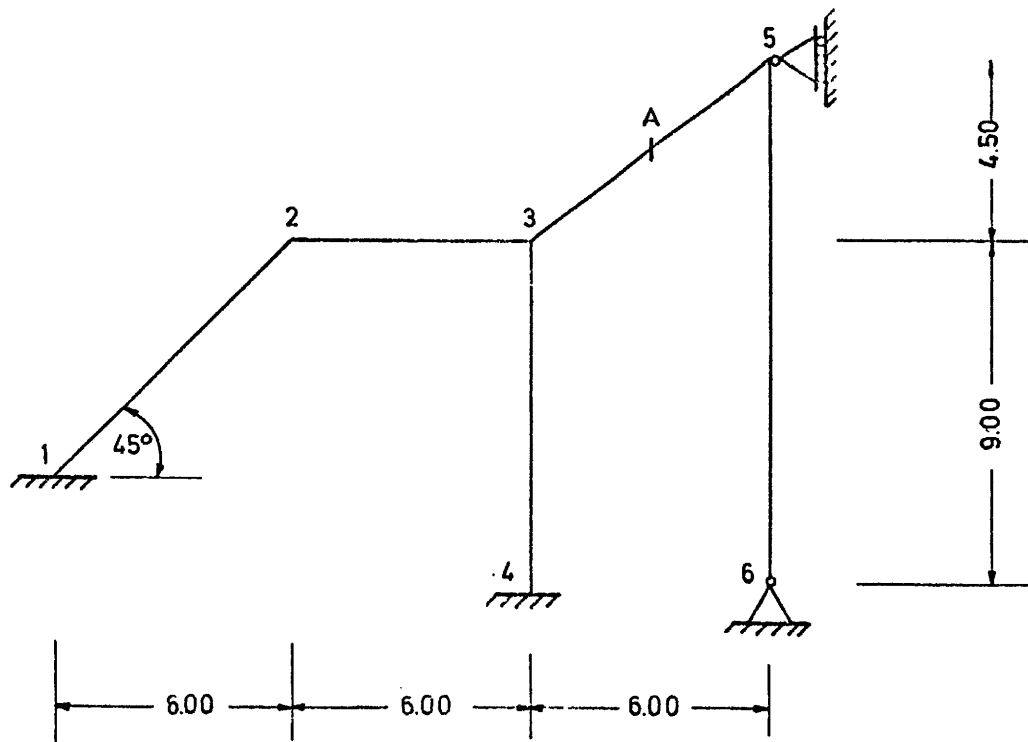


Fig. E14.1a

Las rigideces de las barras son:

$$R_{12} = R_{21} = \frac{4EI}{6\sqrt{2}} \times 0,47; \quad R_{23} = R_{32} \times \frac{2}{3} = 0,67;$$

$$R_{34} = R_{43} \times \frac{4}{9} = 0,44; \quad R_{35} = R_{53} \times \frac{4}{7,5} = 0,53$$

$$R_{56} \times \frac{3}{13,5} = 0,22$$

Los momentos de empotramiento perfecto para los distintos casos son:

1) Descenso de apoyo:

Teniendo en cuenta la figura E14.1b y considerando $A = EI \cdot 10^{-2}$ se deduce:

$$d_{13} = 10^{-2}$$

$$d_{23} = \frac{7,5}{6} \cdot 10^{-2}$$

$$d_{33} = \frac{4,5}{6} \cdot 10^{-2}$$

$$d_{12} = \frac{4,5 \sqrt{2}}{6} \cdot 10^{-2}$$

$$d_{22} = \frac{4,5}{6} \cdot 10^{-2}$$

$$\hat{M}_{12} = \hat{M}_{21} = A \cdot \frac{6}{72} \cdot \frac{4,5 \sqrt{2}}{6} = 0,0884 A$$

$$\hat{M}_{23} = \hat{M}_{32} = A \cdot \frac{6}{6^2} \cdot \frac{1,5}{6} = 0,0417 A$$

$$\hat{M}_{34} = \hat{M}_{43} = A \cdot \frac{6}{31} \cdot \frac{4,5}{6} = 0,0556 A$$

$$\hat{M}_{35} = \hat{M}_{53} = -A \cdot \frac{6}{7,5^2} \cdot \frac{7,5}{6} = -0,124 A$$

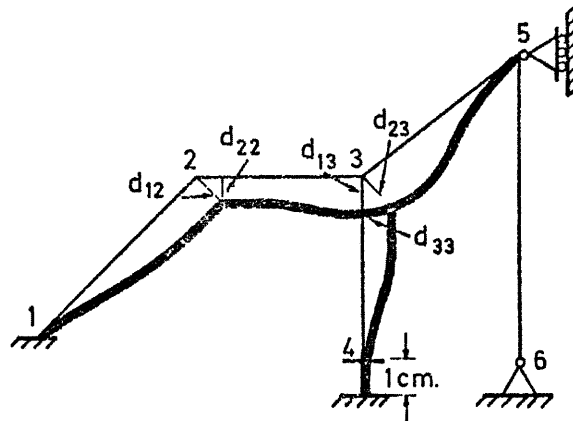


Fig. E14.1b

2) Giro de apoyo.

A partir de la figura E14.1c y que $\theta_4 = 0,5 \cdot 10^{-2}$ rd resulta:

$$\hat{M}_{43} = R_{43} \cdot \theta_4 = A \cdot 0,44 \cdot 0,5 = 0,22 A$$

$$\hat{M}_{34} = \gamma \hat{M}_{43} = 0,11 A$$

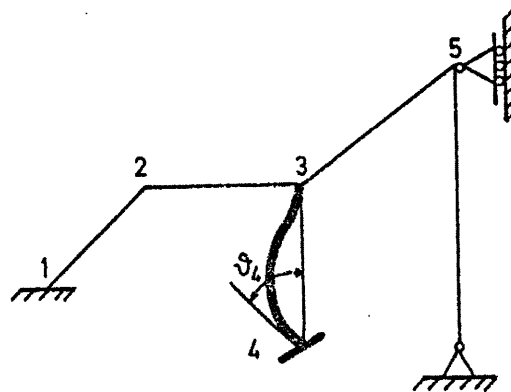


Fig. E14.1c

3) Incremento de temperatura.

Según la figura E14.1d se tiene:

$$\Delta_{2-3} = \alpha L \Delta t = 10^{-5} \cdot 6 \cdot 40 = 24 \cdot 10^{-4} = 0,24 \cdot 10^{-2}$$

$$d_{12} = 0,24 \cdot 10^{-2}$$

$$d_{22} = 0,34 \cdot 10^{-2}$$

$$\hat{M}_{12} = \hat{M}_{21} = -A \cdot \frac{6}{6^2} \cdot 2 \cdot 0,34 = -0,0283 A$$

$$\hat{M}_{23} = \hat{M}_{32} = A \cdot \frac{6}{6^2} \cdot 2 \cdot 0,24 = 0,04 A$$

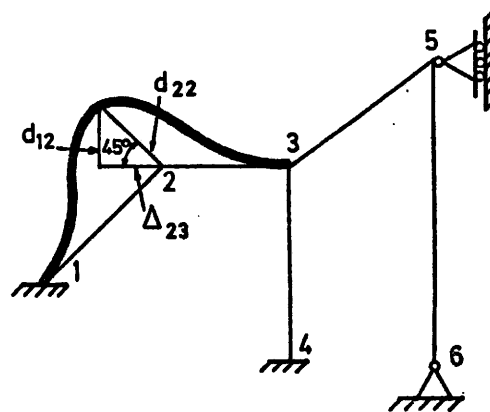


Fig. E14.1d

$$2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,3 \cdot 0,4^3 \cdot 10^{-2} = 32$$

Y los momentos de empotramiento totales son:

$$\hat{M}_{12} = \hat{M}_{21} = 1,92 \text{ m.T}; \quad \hat{M}_{23} = \hat{M}_{32} = 2,61 \text{ m.T}$$

$$\hat{M}_{34} = 5,3 \text{ m.T}; \quad \hat{M}_{43} = 8,82 \text{ m.T}; \quad \hat{M}_{35} = \hat{M}_{53} = -4,3 \text{ m.T}$$

Con estos datos se efectúa el Cross de la Tabla E14.1a.

Tabla E14.1a

Nudo	2		2			5	
Barra	2-1	2-3	3-2	3-4	3-5	5-3	5-6
γ	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	
R	0,47	0,67	0,67	0,44	0,53	0,53	0,22
K	0,41	0,59	0,41	0,27	0,32	0,71	0,29
\hat{M}	1,92	2,61	2,61	5,30	-4,30	-4,30	0,00
M^I	-1,86	-2,67	-1,48	-0,97	-1,16	3,05	1,25
M^{II}	0,00	-0,74	-1,34	0,00	1,53	-0,58	0,00
M^{III}	0,30	0,44	-0,08	-0,05	-0,06	0,41	0,17
Σ	0,36	-0,36	0,29	4,28	-3,99	-1,42	1,42

$$M_{12} = (0,36 - 1,92) \cdot 0,5 + 1,92 = 1,14 \text{ m.t}$$

$$M_{43} = (4,28 - 5,3) \cdot 0,5 + 8,82 = 8,31 \text{ m.t}$$

El resultado se dibuja en la figura E14.1e.

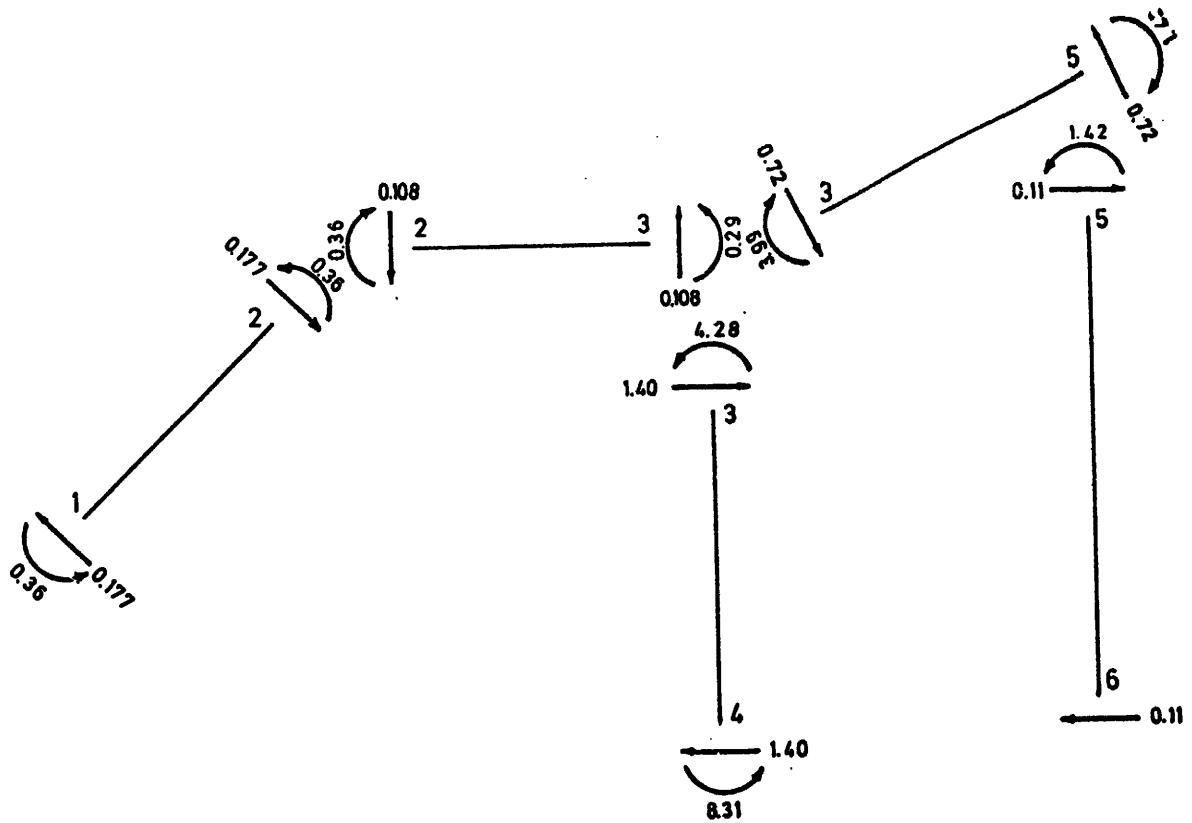


Fig. E 14.1 e

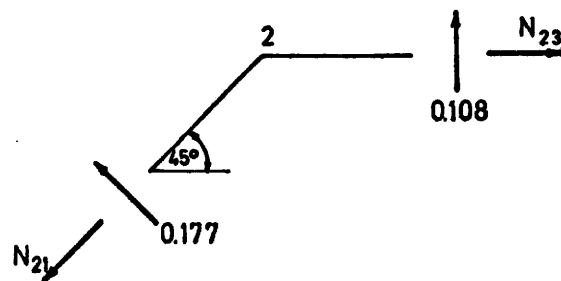


Fig. E 14.1 f

Equilibrio del nudo 2 (figura E14.1f):

Proyectando según la vertical:

$$0,108 + 0,177 \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{21} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 ; N_{21} = \frac{0,216 + 0,177\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0,33$$

$$N_{23} = (0,177 + 0,33) \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,36 \text{ t}$$

Las reacciones en 1 son las que se indican en la figura E14.1g.

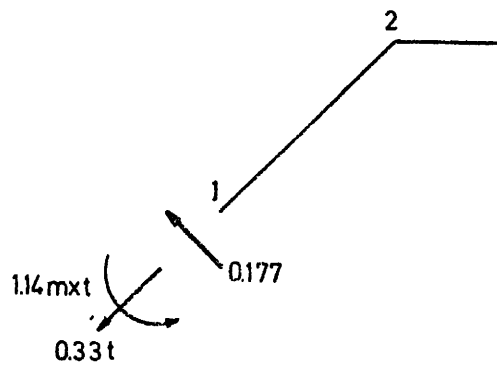


Fig. E14.1g

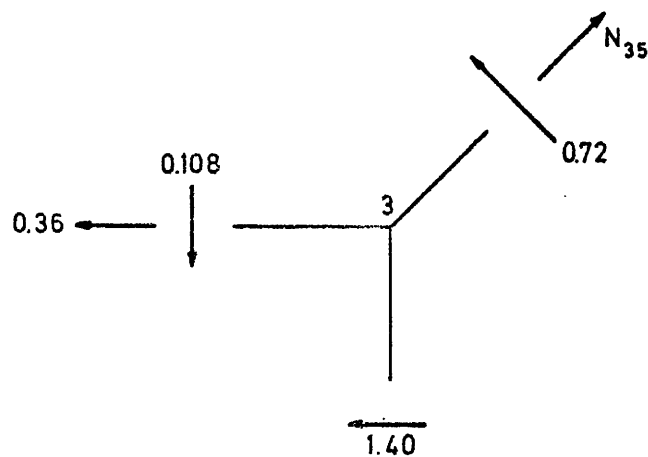


Fig. E14.1h

Equilibrio del nudo 3 (figura E14.1h):

$$N_{35} \cos \alpha = 0,36 + 1,40 + 0,72 \operatorname{sen} \alpha$$

$$N_{35} = \frac{1,76 + 0,72 \frac{4,5}{7,5}}{\frac{6}{75}} = 2,74 \text{ t}$$

Los esfuerzos en A son los de la figura E14.1i.

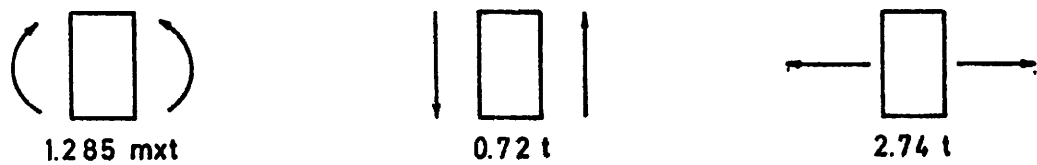


Fig. E14.1 i

Ejercicio E14.2.

En la estructura indicada en la figura E14.2a., -
hallar las leyes de esfuerzos si toda la estructura sufre -
un incremento de temperatura de 40°C .

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ ton/m}^2; \quad \alpha = 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$$

Sección de todas las barras: $0,30 \cdot 0,40 \text{ m}^2$.

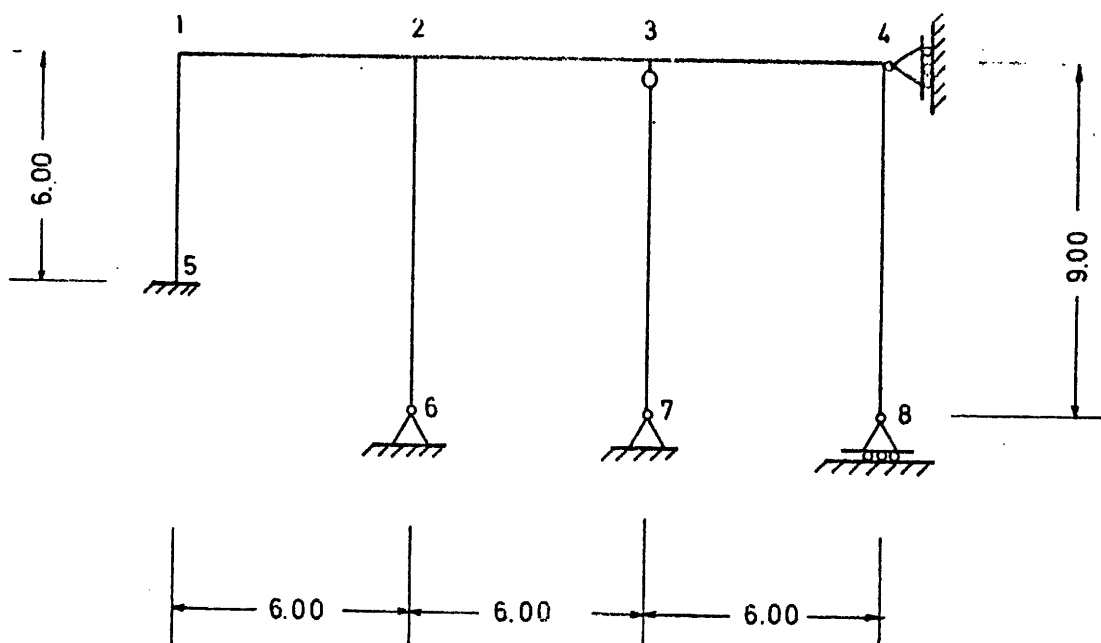


Fig. E14.2a

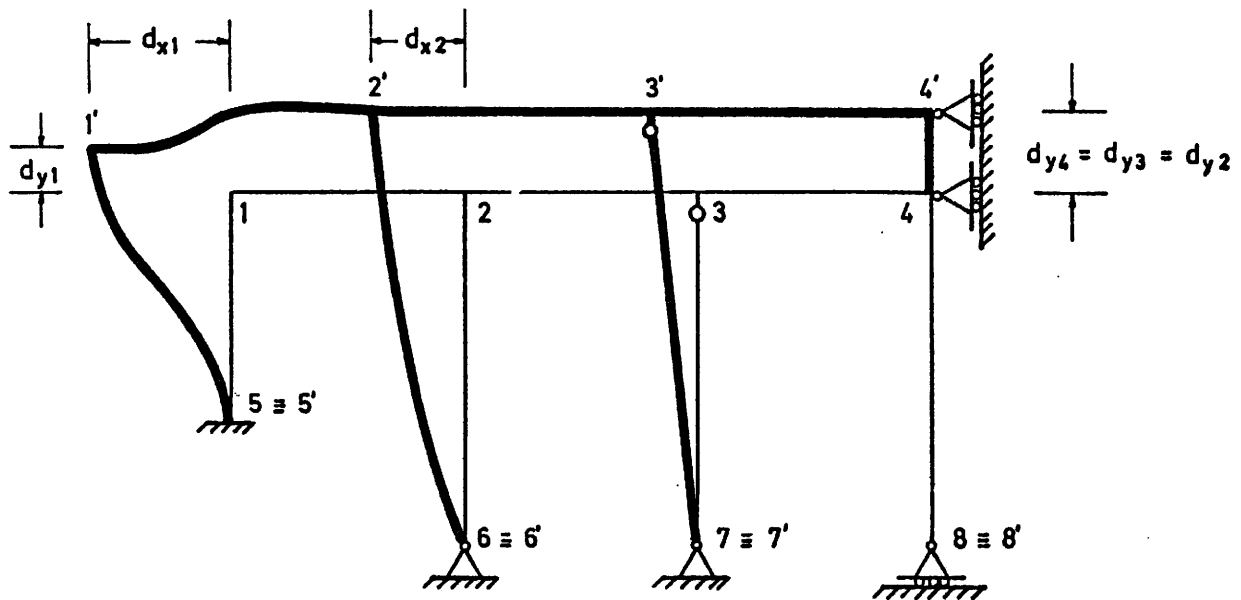


Fig. E 14.2 b

Teniendo en cuenta la figura E14.2b. y que el alargamiento de una barra de longitud L es $\Delta_x = \alpha \cdot L \Delta T = 10^{-5} \cdot L \cdot 40 = 4 \cdot 10^{-4} \cdot L$ se puede escribir:

$$d_{y4} = d_{y3} = d_{y2} = 4 \cdot 10^{-4} \cdot 9 = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$d_{y1} = 4 \cdot 10^{-4} \cdot 6 = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$d_{x2} = 2 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 6 = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$d_{x1} = 3 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 6 = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Los asientos diferenciales son, para cada barra, los que siguen:

$$\text{barra 1-2 } \Delta_{y1-2} = d_{y2} - d_{y1} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{barra 1-5 } \Delta_{Y_{1-5}} = d_{x1} = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{barra 2-6 } \Delta_{Y_{2-6}} = d_{x2} = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

siendo

$$\begin{aligned} EI &= 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} bh^3 = 10^6 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0,3 \cdot 0,4^3 = 10^6 \cdot 0,0032 = \\ &= 3,2 \cdot 10^3 \text{ T.m}^2 \end{aligned}$$

los momentos de empotramiento perfecto son:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{1-5} = \hat{M}_{5-1} &= -6 \frac{EI}{L^2} \Delta_{Y_{1-5}} = -6 \cdot \frac{3,2 \cdot 10^3}{6^2} \cdot 7,2 \cdot 10^{-3} = \\ &= -3,84 \text{ m.T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_{1-2} = \hat{M}_{2-1} &= -6 \frac{EI}{L^2} \Delta_{Y_{1-2}} = -6 \cdot \frac{3,2 \cdot 10^3}{6^2} \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} = \\ &= -0,64 \text{ m.T} \end{aligned}$$

$$\hat{M}_{2-6} = -3 \frac{EI}{L^2} \Delta_{Y_{2-6}} = -3 \cdot \frac{3,2 \cdot 10^3}{9^2} \cdot 4,8 \cdot 10^{-3} = -0,57 \text{ m.T}$$

Las rigideces de las barras son las que se indican a continuación:

$$R_{1-5} = R_{5-1} = R_{1-2} = R_{2-1} = R_{2-3} = R_{3-2} = \frac{4EI}{L} = \frac{4}{6} EI = \frac{2}{3} EI$$

$$R_{2-6} = \frac{3EI}{L} = \frac{3}{9} EI = \frac{1}{3} EI$$

$$R_{3-4} = \frac{3EI}{L} = \frac{3}{6} EI = \frac{1}{2} EI$$

Con estos datos se efectúa el cálculo de Cross de la tabla E14.2a.

Tabla E14.2a

NUDO	1		2			3	
BARRA	1-5	1-2	2-1	2-6	2-3	3-2	3-4
γ	0,5	0,5	0,5		0,5	0,5	
R	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	1/2
K	0,5	0,5	0,4	0,2	0,4	0,57	0,43
\hat{M}	-3,84	-0,64	-0,640	-0,570	0,000	0,000	0,000
M^I	2,24	2,24	0,484	0,242	0,484	0,000	0,000
M^{II}	0,00	0,242	1,120	0,000	0,000	0,242	0,000
M^{III}	-0,121	-0,121	-0,448	-0,224	-0,448	-0,138	-0,104
M^{IV}	0,000	-0,224	-0,061	0,000	-0,069	-0,224	0,000
M^V	0,112	0,112	0,052	-0,026	0,052	0,128	0,096
M^{VI}	0,000	0,026	0,056	0,000	0,064	0,026	0,000
M^{VII}	-0,013	-0,013	-0,048	-0,024	-0,048	-0,015	-0,011
Σ	-1,622	1,622	0,515	0,550	0,035	0,019	-0,019

$$M_{ji} = (M_{ij} - \hat{M}_{ij})\gamma_{ij} + \hat{M}_{ij}$$

$$M_{5-1} = (-1,622 + 3,84) \cdot 0,5 - 3,84 \quad M_{5-1} = -2,731 \text{ m.t}$$

El resultado se esquematiza en la figura E14.2c.

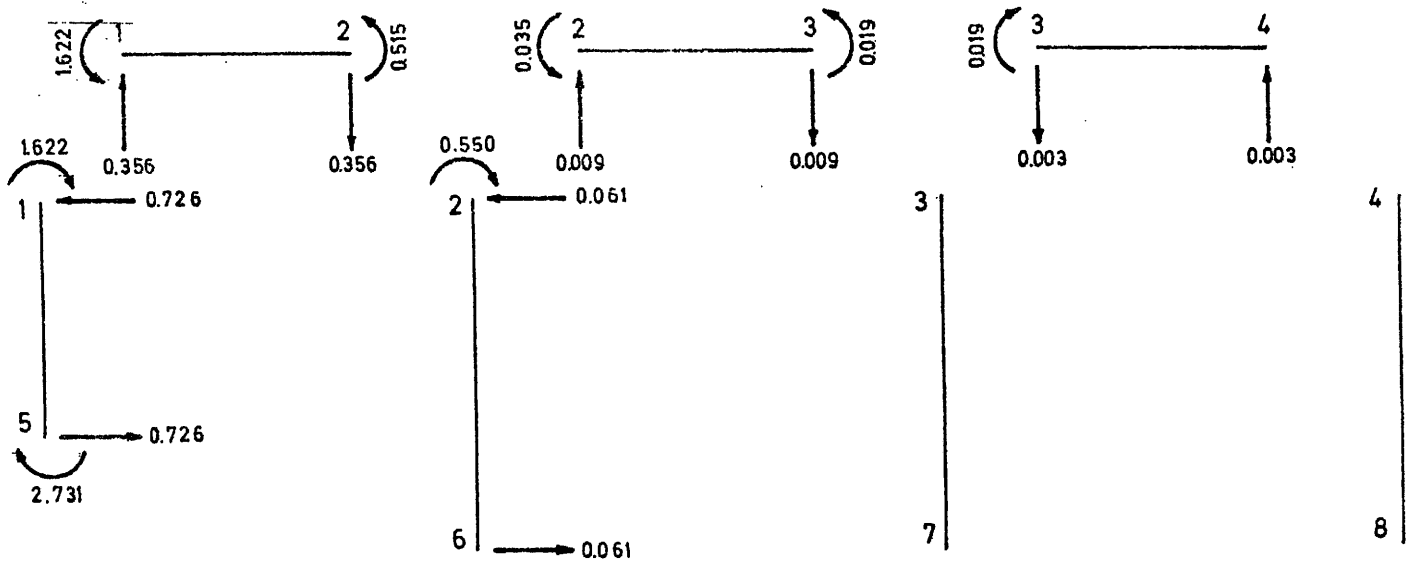


Fig. E14. 2 c

La ley de momentos flectores es la de la figura E14.2d y la de cortantes la de la figura E14.2e.

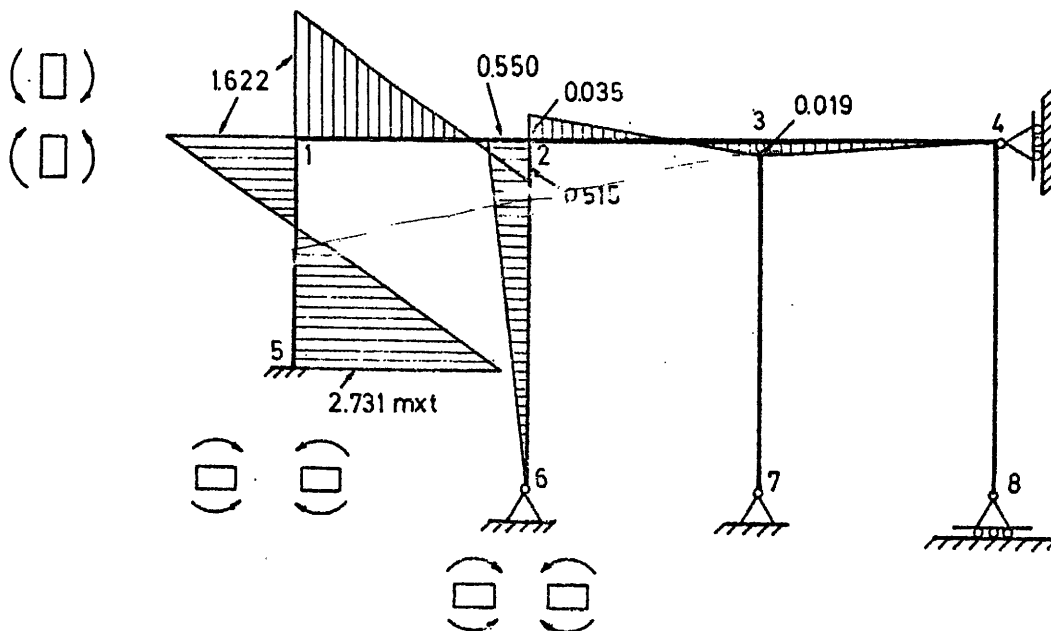


Fig. E14.2 d

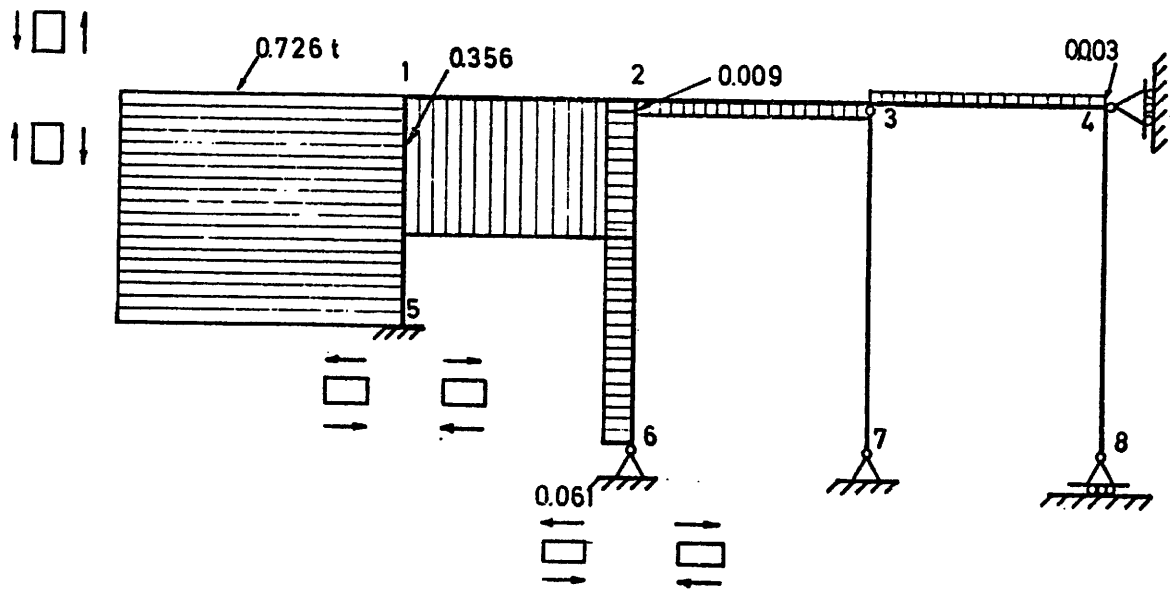


Fig. E 14.2 e

Para hallar los axiles se impone el equilibrio -
de los nudos 1, 2, 3 y 4 (figura 14.3f).

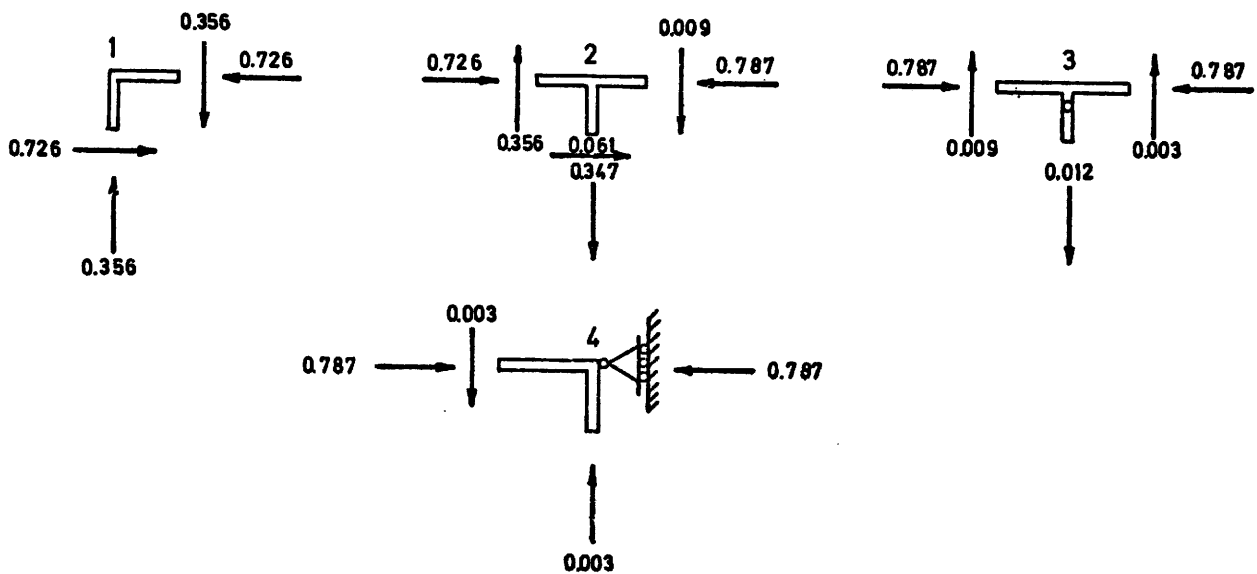


Fig. E 14.2 f

La ley de axiles se representa en la figura E14.2g.

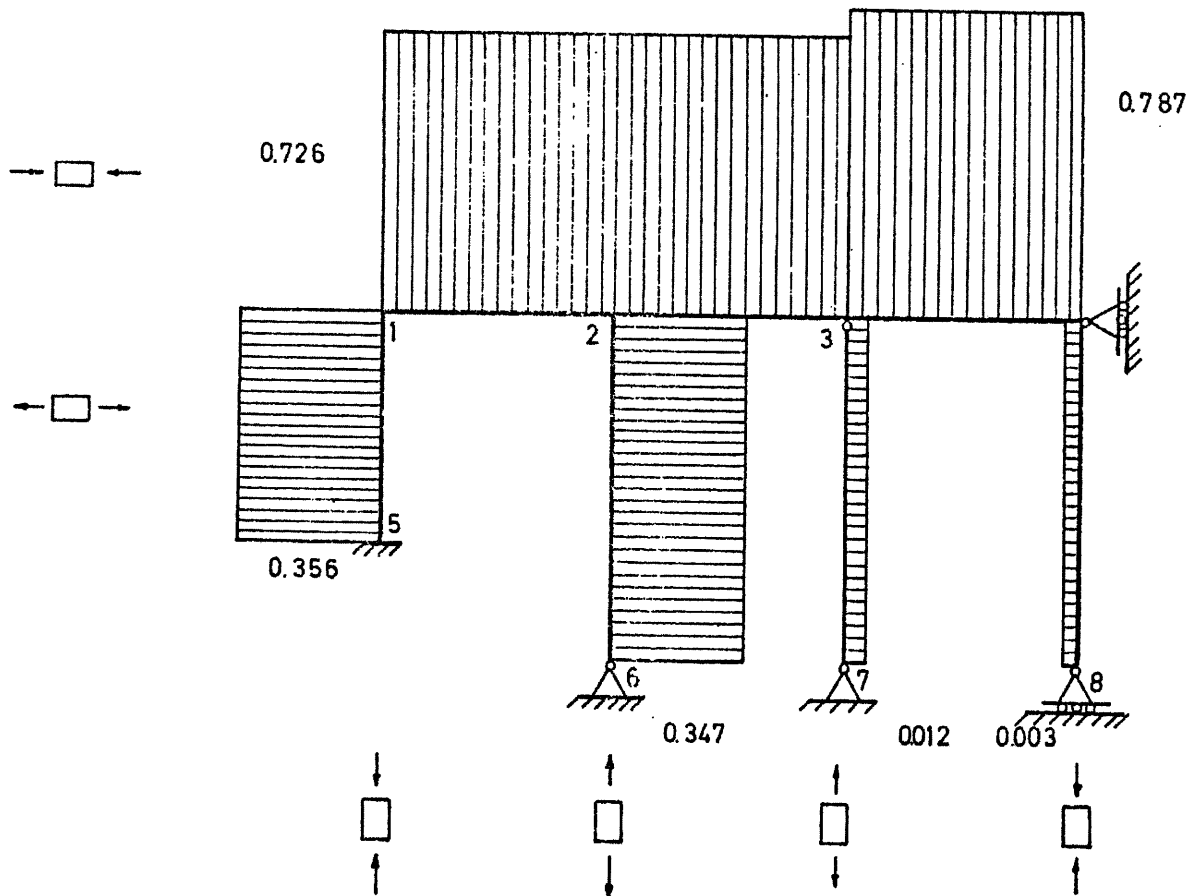


Fig. E14.2 g

Ejercicio E15.1.

Hallar en la estructura de la figura E15.1a., - cuando una carga vertical unidad dirigida hacia abajo recorre el dintel 1, 2, 3, 4, la línea de influencia de los siguientes valores:

- a) Momento flector en A.
- b) Esfuerzo cortante en B.
- c) Flecha en B.

Se utilizará el método de los momentos 100.

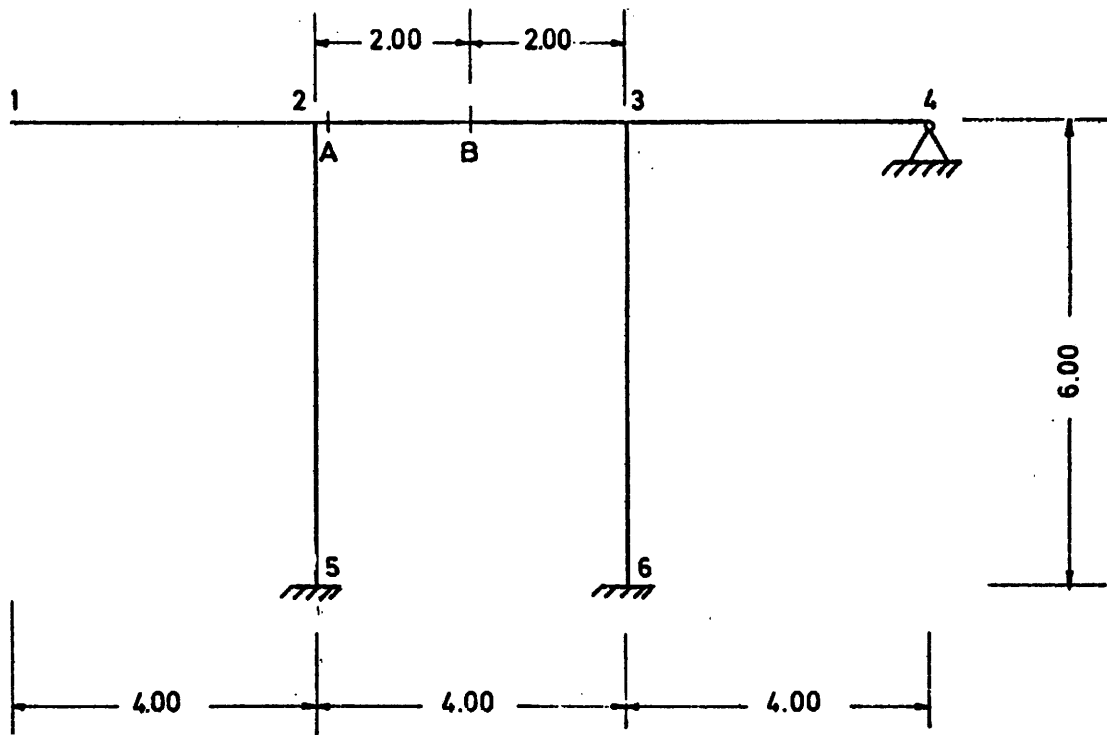


Fig. E 15.1a

Los tres casos genéricos de actuación de la carga unidad descendente son los que aparecen en la figura E15.1b donde se señalan también los momentos de empotramiento perfecto a tener en cuenta en cada caso.

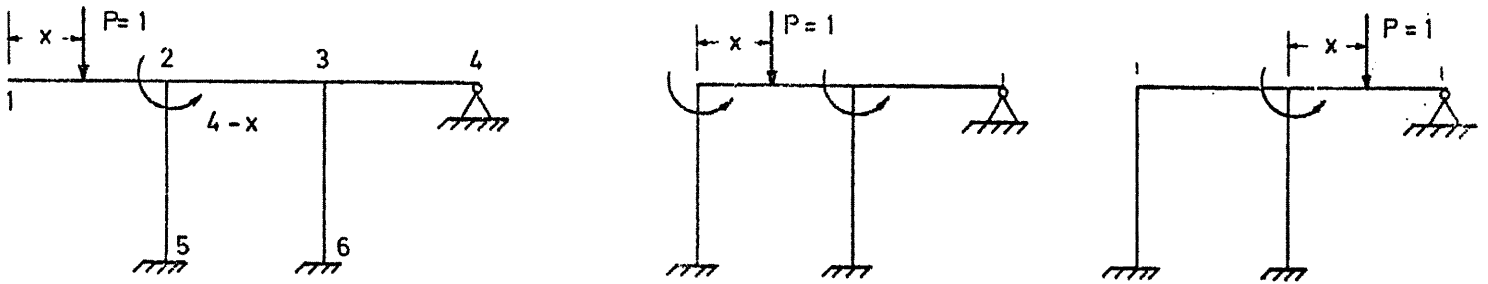


Fig. E15.1 b

Se considerarán los dos estados de la figura E25.1c que linealmente combinados dan todos los demás.

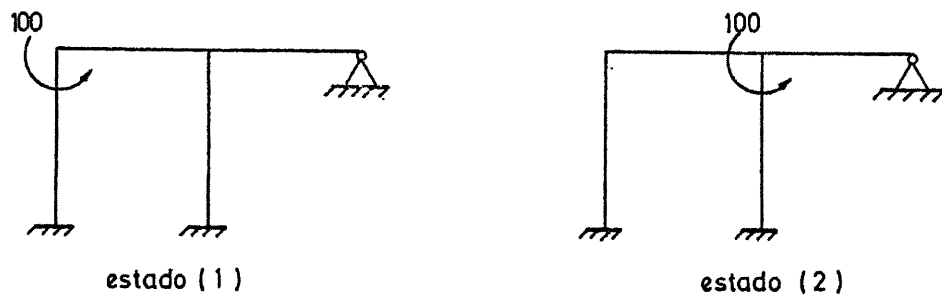


Fig. E15.1 c

Los momentos de empotramiento perfecto para el caso biempotrado (figura E15.1d) y para el caso empotrado-apoyado (figura E15.1e) son los que allí se indican.

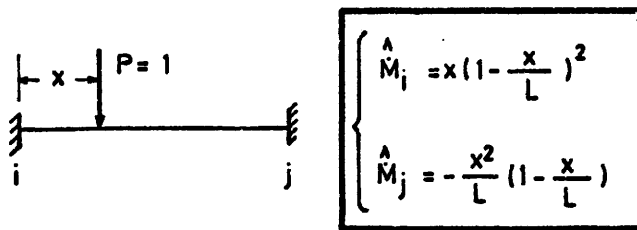


Fig. E15.1d

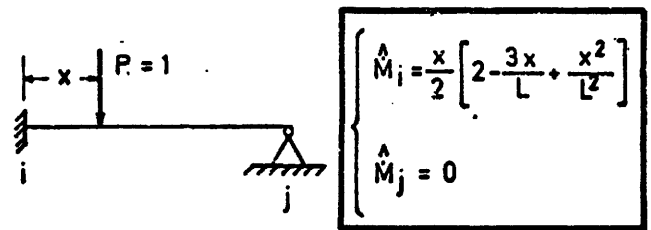


Fig. E15.1e

La resolución del estado (1) se hace en la tabla E15.1a y la del estado (2) en la tabla E15.1b.

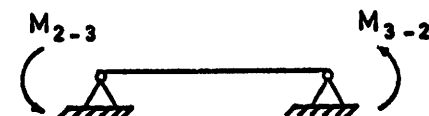
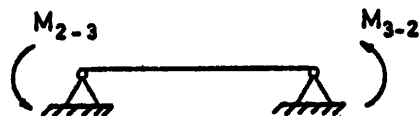
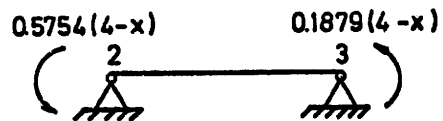
Tabla E15.1a

ESTADO 1					
NUDO	2			3	
BARRA	2-5	2-3	3-2	3-4	3-6
γ	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
R	0,67	1	1	0,75	0,67
M	0,40	0,60	0,41	0,31	0,28
$M_{ext.}$	100,00				
M^I	40,00	60,00	0,00	0,00	0,00
M^{II}	0,00	0,00	30,00	0,00	0,00
M^{III}	0,00	0,00	-12,30	-9,30	-8,40
M^{IV}	0,00	-6,15	0,00	0,00	0,00
M^V	2,46	3,69	0,00	0,00	0,00
M^{VI}	0,00	0,00	1,85	0,00	0,00
M^{VII}	0,00	0,00	-0,76	-0,57	-0,52
Σ	42,46	57,54	18,79	-9,87	-8,92

Tabla E15.1b.

ESTADO 2					
	2		3		
BARRA	2-5	2-3	3-2	3-4	3-6
γ	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
R	0,67	1	1	0,75	0,67
K	0,40	0,60	0,41	0,31	0,28
$M_{ext.}$				100,00	
M^I	0,00	0,00	41,00	31,00	28,00
M^{II}	0,00	20,50	0,00	0,00	0,00
M^{III}	-8,20	-12,30	0,00	0,00	0,00
M^{IV}	0,00	0,00	-6,15	0,00	0,00
N^V	0,00	0,00	2,52	1,91	1,72
M^{VI}	0,00	1,26	0,00	0,00	0,00
M^{VII}	-0,50	-0,76	0,00	0,00	0,00
Σ	-8,70	8,70	37,37	32,91	29,72

a) La línea de influencia del flector en A se calcula en la tabla E15.1c. y se encuentra dibujada en la figura E15.1f.



$$M_{2-3} = \frac{57,54}{100} (4-x)$$

$$M_{2-3} = \frac{\hat{M}_2}{100} (100 - 57,54) - \frac{\hat{M}_3}{100} 8,7$$

$$\hat{M}_2 = x(1-x/4)^2 \quad \hat{M}_3 = -\frac{x^2}{4} (1-x/4)$$

$$M_{2-3} = -\frac{\hat{M}_3}{100} \cdot 8,7$$

$$\hat{M}_3 = \frac{x}{2} \left\{ 2 - \frac{3x}{4} + \frac{x^2}{16} \right\}$$

$M_A = 0,5754 (4-x)$	
x	M
0	2,30
1	1,73
2	1,15
3	0,57
4	0

$M_A = 0,4246 \hat{M}_2 - 0,087 \hat{M}_3$			
x	\hat{M}_2	\hat{M}_3	M
0	0	0	0
1	0,5625	-0,1875	0,255
2	0,5	-0,5	0,256
3	0,1875	-0,5625	0,129
4	0	0	0

$M_A = -0,087 \hat{M}_3$		
x	\hat{M}_3	M
0	0	0
1	0,65625	-0,057
2	0,75	-0,065
3	0,46875	-0,041
4	0	0

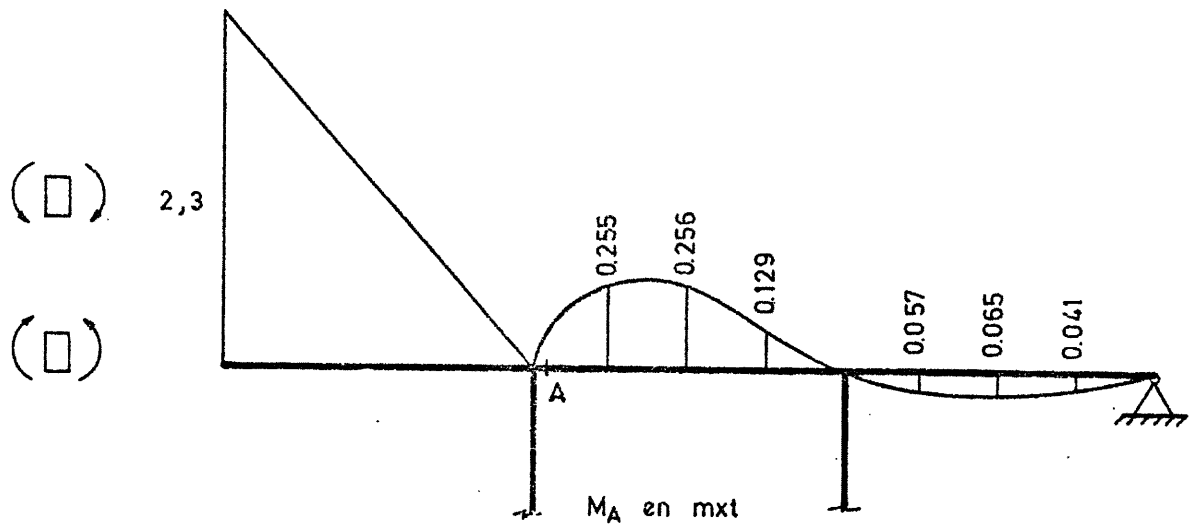
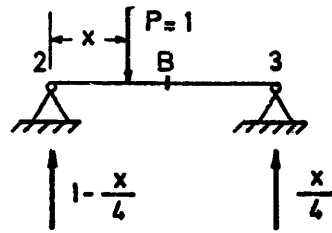


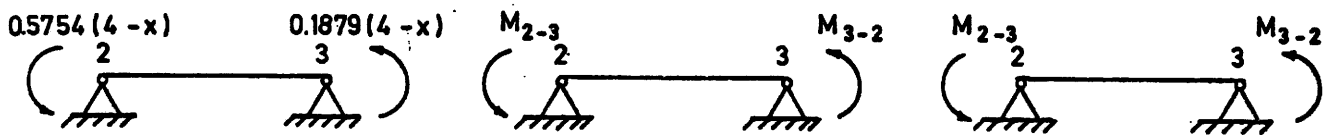
Fig. E15.1f.- Línea de influencia del momento flector en A

b) La línea de influencia del esfuerzo cortante en B se calcula en la tabla E15.1d y se representa gráficamente en la figura E15.1g.



$$x \leq 2 ; Q_B^1 = \frac{x}{4}$$

$$x \geq 2 ; Q_B^1 = 1 - \frac{x}{4}$$



$$M_{2-3} = 0,4246 \hat{M}_2 - 0,087 \hat{M}_3$$

$$\hat{M}_{2-3} = -0,087 \hat{M}_3$$

$$M_{3-2} = -0,1879 \hat{M}_2 + 0,6263 \hat{M}_3$$

$$\hat{M}_{3-2} = -0,3737 \hat{M}_3$$

$$\frac{1}{4}(0,5754+0,1879)(4-x)Q_B^2 = -\frac{M_{2-3} + M_{3-2}}{4}$$

$$Q_B = -\frac{M_{2-3} + M_{3-2}}{4}$$

$$Q_B = -0,190825(4-x) \quad Q_B^2 = -0,059175 \hat{M}_2 - 0,134825 \hat{M}_3$$

$$Q_B = 0,115175 \hat{M}_3$$

$$\hat{M}_2 = x(1 - \frac{x}{4})^2 ; \hat{M}_3 = -\frac{x^2}{4} (1 - \frac{x}{4})$$

$$\hat{M}_3 = \frac{x}{2} \{ 2 - \frac{3x}{4} + \frac{x^2}{16} \}$$

x	Q_B	x	Q_B^1	\hat{M}_2	\hat{M}_3	Q_B^2	Q_B	x	\hat{M}_3	Q_B
0	-0,76	0	0,00	0,0000	0,0000	0,000	0,00	0	0,00000	0,000
1	-0,57	1	0,25	0,5625	-0,1875	-0,008	0,24	1	0,65625	0,076
2	-0,38	2	0,50	0,5000	-0,5000	0,038	0,54	2	0,75000	0,086
3	-0,19	3	-0,25	0,1875	-0,5625	0,065	-0,18	3	0,46875	0,054
4	0,00	4	0,00	0,0000	0,0000	0,000	0,00	4	0,00000	0,000

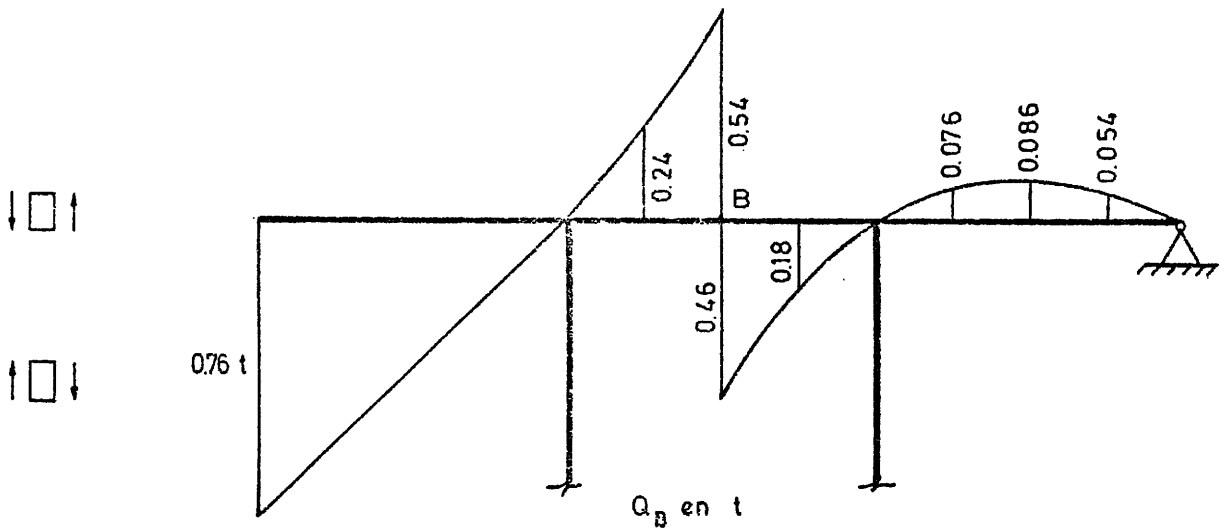


Fig. E15.1g.- Línea de influencia del cortante en B

c) Si se considera la figura E15.1h. se tiene:

$$\text{para } x = 0,5 L \quad \frac{v(x)}{L^2/EI} = 0,0625$$

$$\text{donde } EI = 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,4^3 = \frac{3 \cdot 200}{3} \text{ t} \cdot \text{m}^2$$

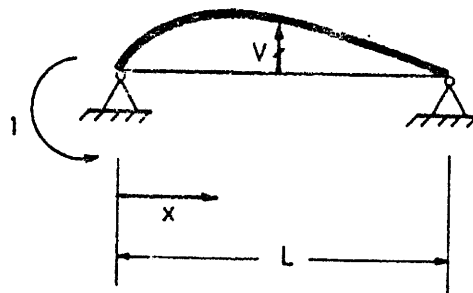


Fig. E15.1h

La línea de influencia la flecha en B se calcula en la tabla E15.1e y se dibuja en la figura E15.1i.

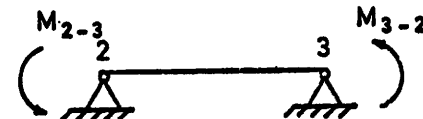
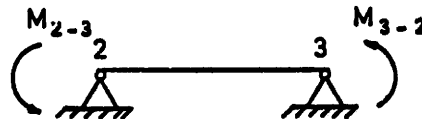
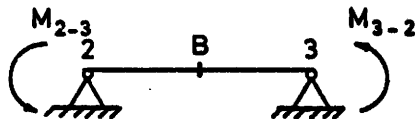
TABLA E 15. 1e

$$x < 2: V_B^1(x) = \frac{x}{48 EI} \{3L^2 - 1x^2\}$$

$$x > 2: V_B^1(x) = \frac{L - x}{48 EI} \{3L^2 - 4(L - x)^2\}$$

$$x < 2: V_B^1(x) = -0,078125(12 - x^2)$$

$$x > 2: V_B^1(x) = -0,078125(4 - x) \{12 - (4 - x)^2\}$$



$$M_{2-3} = 0,5754(4 - x)$$

$$M_{3-2} = 0,1879(4 - x)$$

$$V_B = 0,0625 \frac{16}{EI} (0,5754 - 0,1879)(4 - x) \quad M_{3-2} = -0,1879 \hat{M}_2 + 0,6263 \hat{M}_3$$

$$V_B = 0,36328(4 - x) \text{ mm.}$$

$$M_{2-3} = 0,4245 \hat{M}_2 = 0,087 \hat{M}_3$$

$$M_{2-3} = 0,087 \hat{M}_3$$

$$\hat{M}_3 = \frac{x}{2}^2 - \frac{3x}{4} + \frac{x^2}{16}$$

$$M_{3-2} = -0,3737 \hat{M}_3$$

$$V_B^2(x) = 0,57422 \hat{M}_2 - 0,6687 \hat{M}_3 \text{ mm.} \quad V_B^B(x) = 0,0625 \frac{16}{EI} \hat{M}_3 + 0,3737 \hat{M}_3$$

$$V_B^B(x) = 0,26878 \hat{M}_3 \text{ mm.}$$

x	$V_B(x)$ m m.
0	1,45
1	1,09
2	0,73
3	0,36
4	0,00

x	\hat{M}_2	\hat{M}_3	$\hat{M}_B^2(x)$	$V_B^1(x)$	$V_B(x)$
0	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,00
1	0,5625	-0,1785	0,45	-0,86	-0,41
2	0,5000	-0,5000	0,62	-1,25	-0,63
3	0,1875	-0,5625	0,48	-0,86	-0,38
4	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,00

x	\hat{M}_3	$V_B(x)$ m m.
0	0,0000	0,00
1	0,6562	0,18
2	0,7500	0,20
3	0,4687	0,13
4	0,0000	0,00

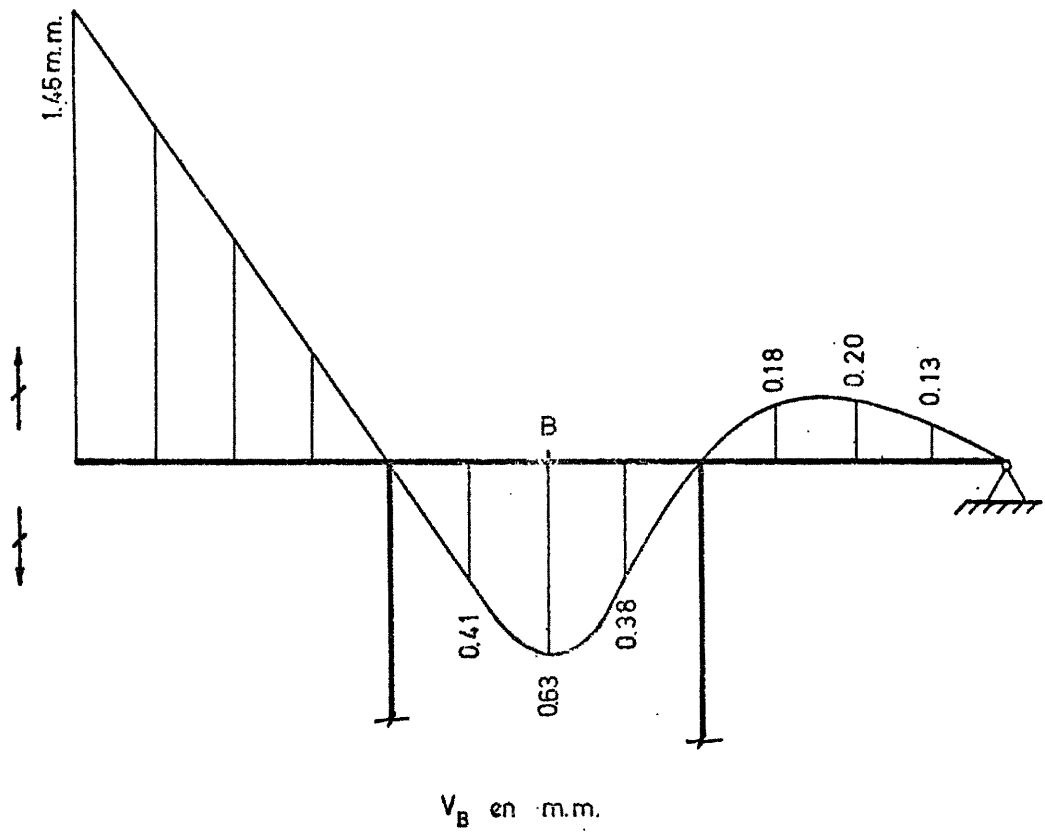


Fig. E15.1i.- Línea de influencia de la flecha en B

Ejercicio E15.2.

Hallar en la estructura de la figura E15.2a cuando una carga vertical unidad dirigida hacia abajo recorre - el dintel 1, 2, 3, 4 la línea de influencia de los siguientes valores:

- a) Momento flector en A
- b) Esfuerzo cortante en B
- c) Flecha en B

Se utilizará el método de reciprocidad.

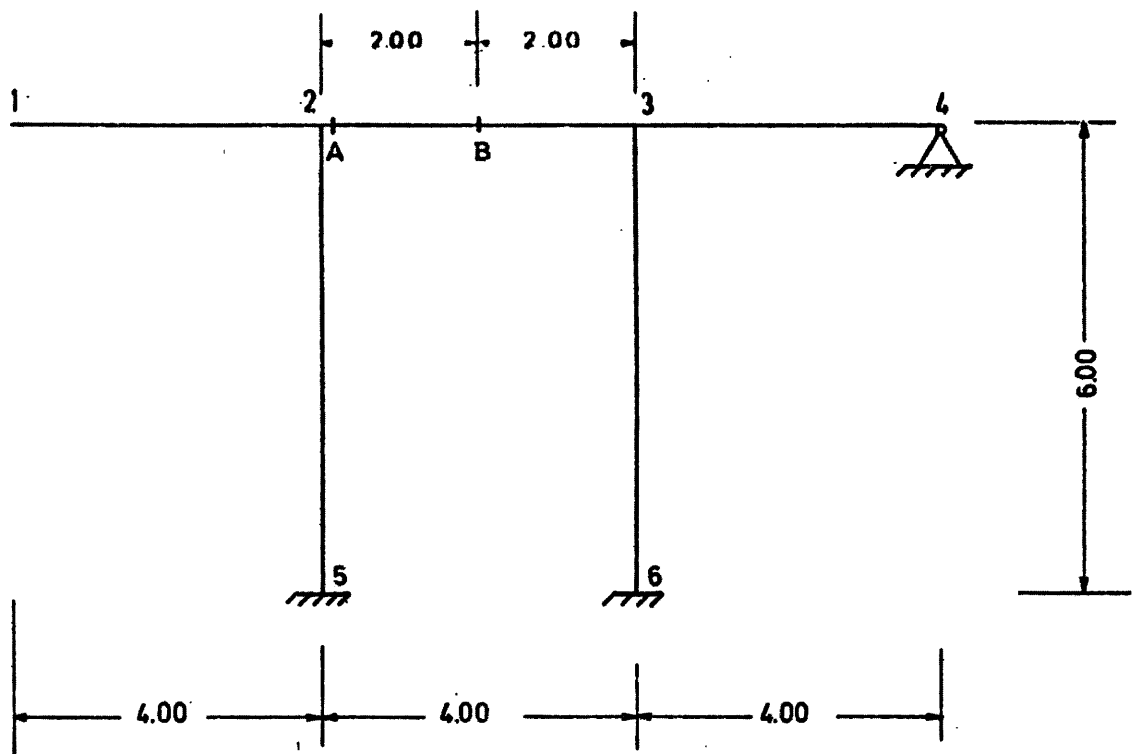


Fig. E 15. 2 a

Todas las barras son de $0,40 \times 0,10 \text{ m}^2$ y $E = 2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$.

a) La línea de influencia del momento flector en A se calcula dado en la sección 2 un giro relativo de 1 radián, estado que se resuelve en suma de dos que son los indicados en la figura E15.2b.

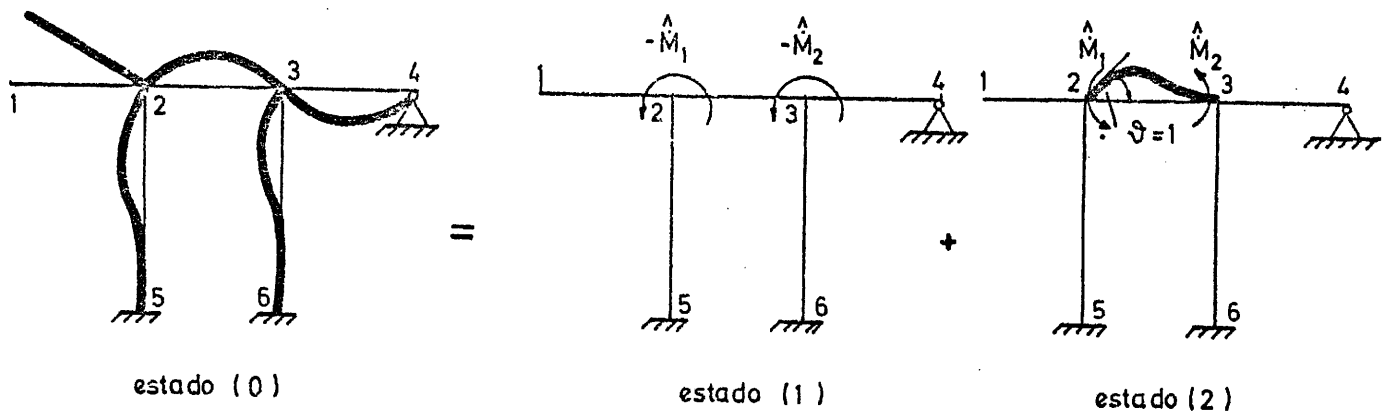


Fig. E15.2b

Con los valores de $\hat{M}_1 = \frac{4EI}{L}$ y $\hat{M}_2 = 0,5 \hat{M}_1$ el Cross del estado (1) se puede ver en la tabla E15.2a.

Tabla E15.2a

Nudo	2		3		
Barra	2-5	2-3	3-2	3-6	3-4
Y	0,5	0,5	0,5	0,5	
R	0,66	1,00	1,00	0,66	0,75
K	0,40	0,60	0,41	0,28	0,31
\hat{M}	0,00	1,00	0,50	0,00	0,00
R_1	-0,40	-0,60	-0,20	-0,14	-0,16
T_1	0,00	-0,10	-0,30	0,00	0,00
R_2	0,04	0,06	0,12	0,09	0,09
Σ	-0,36	0,36	0,12	-0,05	-0,07

Entonces: $M_{23} = 0,36 EI$; $M_{32} = 0,12 EI$; $M_{34} = -0,07 EI$

La deformada del tramo 1-2 se obtiene considerando que el giro relativo es igual a 1 rd. Es mejor, sin embargo, calcular la línea de influencia en ese tramo, teniendo en cuenta que es lineal y hallar el momento cuando la carga está en 1. La deformada de los tramos 2-3 y 3-4 se halla en función de los momentos extremos (figura E15.2c).

$$V(x) = M_1 \cdot \frac{L^2}{6EI} A(x) - M_2 \cdot \frac{L^2}{6EI} B(x) = \alpha \cdot A(x) + \beta \cdot B(x)$$

siendo

$$A(x) = \frac{x}{L} \left\{ 2 - \frac{3x}{L} + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right\}; \quad B(x) = \frac{x}{L} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right\}$$

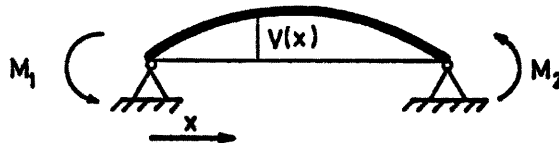


Fig. E15.2 c.

En la tabla E15.2b se dan las deformadas para los distintos tramos.

Figura E15.2d

Deformada 1-2	Deformada 2-3	Deformada 3-4																																																						
$M_A = M_{23} = 1.4 \cdot 0,6 = 2,4 \text{ m.t}$	$\alpha = 0,36 \frac{16}{6} = 0,96$ $\beta = -0,12 \frac{16}{6} = -0,32$	$\alpha = -0,07 \frac{16}{6} = -0,187$ $\beta = 0$																																																						
<table><tr><th>x</th><th>M_A</th></tr><tr><td>0</td><td>2,4</td></tr><tr><td>1</td><td>1,8</td></tr><tr><td>2</td><td>1,2</td></tr><tr><td>3</td><td>0,6</td></tr><tr><td>4</td><td>0,0</td></tr></table>	x	M _A	0	2,4	1	1,8	2	1,2	3	0,6	4	0,0	<table><tr><th>x</th><th>A (x)</th><th>B (x)</th><th>MA</th></tr><tr><td>0</td><td>0,000</td><td>0,000</td><td>0,00</td></tr><tr><td>1</td><td>0,328</td><td>0,234</td><td>0,24</td></tr><tr><td>2</td><td>0,375</td><td>0,375</td><td>0,24</td></tr><tr><td>3</td><td>0,234</td><td>0,328</td><td>0,12</td></tr><tr><td>4</td><td>0,000</td><td>0,000</td><td>0,00</td></tr></table>	x	A (x)	B (x)	MA	0	0,000	0,000	0,00	1	0,328	0,234	0,24	2	0,375	0,375	0,24	3	0,234	0,328	0,12	4	0,000	0,000	0,00	<table><tr><th>x</th><th>A (x)</th><th>MA</th></tr><tr><td>0</td><td>0,000</td><td>0,00</td></tr><tr><td>1</td><td>0,328</td><td>-0,06</td></tr><tr><td>2</td><td>0,375</td><td>-0,07</td></tr><tr><td>3</td><td>0,234</td><td>-0,04</td></tr><tr><td>4</td><td>0,000</td><td>0,00</td></tr></table>	x	A (x)	MA	0	0,000	0,00	1	0,328	-0,06	2	0,375	-0,07	3	0,234	-0,04	4	0,000	0,00
x	M _A																																																							
0	2,4																																																							
1	1,8																																																							
2	1,2																																																							
3	0,6																																																							
4	0,0																																																							
x	A (x)	B (x)	MA																																																					
0	0,000	0,000	0,00																																																					
1	0,328	0,234	0,24																																																					
2	0,375	0,375	0,24																																																					
3	0,234	0,328	0,12																																																					
4	0,000	0,000	0,00																																																					
x	A (x)	MA																																																						
0	0,000	0,00																																																						
1	0,328	-0,06																																																						
2	0,375	-0,07																																																						
3	0,234	-0,04																																																						
4	0,000	0,00																																																						

En la figura E15.2d se representa la línea de influencia del flector en A.

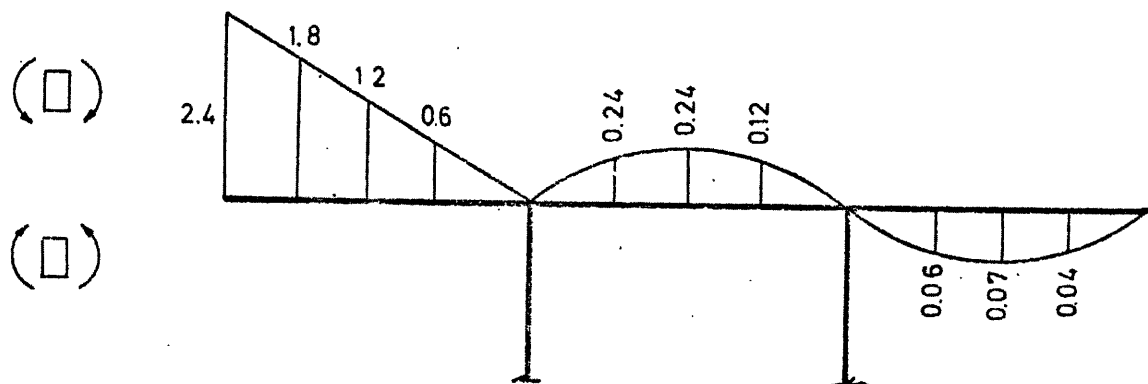


Fig. E15.2d.- Línea de influencia del flector en A en mxt

b) Para hallar la línea de influencia del cortante en B se resuelve el estado (0) de la figura E15.2e.

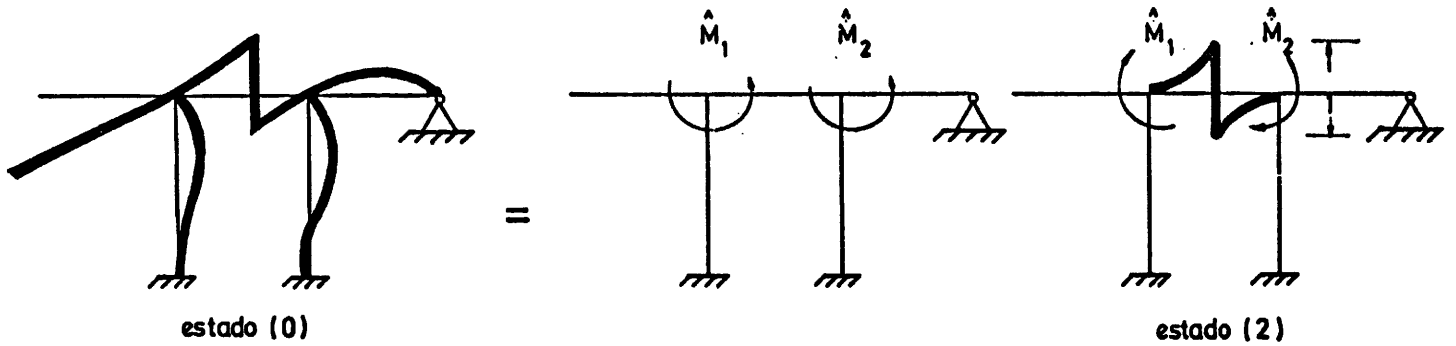


Fig. E15.2e

Como $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = + \frac{6EI}{L^2}$, la resolución del estado (1) es la de la tabla E15.2c.

Tabla E15.2c

Nudo	2		3		
Barra	2-5	2-3	3-2	3-6	3-4
γ	0,5	0,5	0,5	0,5	
R	0,66	1	1	0,66	0,75
K	0,40	0,60	0,41	0,28	0,31
\hat{M}	0,00	-6,00	-6,00	0,00	0,00
R_1	2,40	3,60	2,46	1,68	1,86
T_1	0,00	1,23	1,80	0,00	0,00
R_2	-0,49	-0,74	-0,74	-0,50	-0,56
Σ	1,91	-1,91	-2,48	1,18	1,30

Entonces:

$$M_{23} = -1,91 \cdot EI/L^2; \quad M_{32} = -2,48 \frac{EI}{L^2}; \quad M_{34} = 1,30 \frac{EI}{L^2}$$

Considerando que la deformada isostática es la de la figura E15.2f.

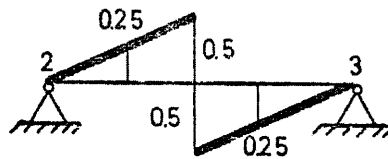


Fig. E15.2 f.- Deformada isostática

y que el giro del nudo 2 es:

$$\theta_2 = \frac{(3,6 - 0,74) \cdot EI/L^2}{EI} = \frac{2,86}{L^2}$$

en la tabla E15.2d se halla la deformada buscada que se dibuja en la figura E15.2g.

Tabla E15.2d

Deformada 1-2		Deformada 2-3				Deformada 3-4				
$V_1 = \theta_2 L =$ $= \frac{2,86}{4} = 0,72$		$\alpha = -1,91 \frac{1}{6} = -0,32$ $\beta = -(-2,48) \frac{1}{6} = 0,41$				$\alpha = 1,30 \frac{1}{6} = 0,22$ $\beta = 0$				
x	Q_B	x	A(x)	B(x)	Q_3^1	Q_3^2	Q_B	x	A(x)	Q_B
0	0,72	0	0,000	0,000	0,00	0,00	0,00	0	0,000	0,00
1	0,54	1	0,328	0,234	-0,01	0,25	0,24	1	0,328	0,07
2	0,36	2 ⁻	0,375	0,375	0,04	0,50	0,54	2	0,375	0,08
3	0,18	2 ⁺	0,375	0,375	0,04	-0,50	-0,46	3	0,234	0,05
4	0,00	3	0,234	0,328	0,06	-0,25	-0,19	4	0,000	0,00
		4	0,000	0,000	0,00	0,00	0,00			

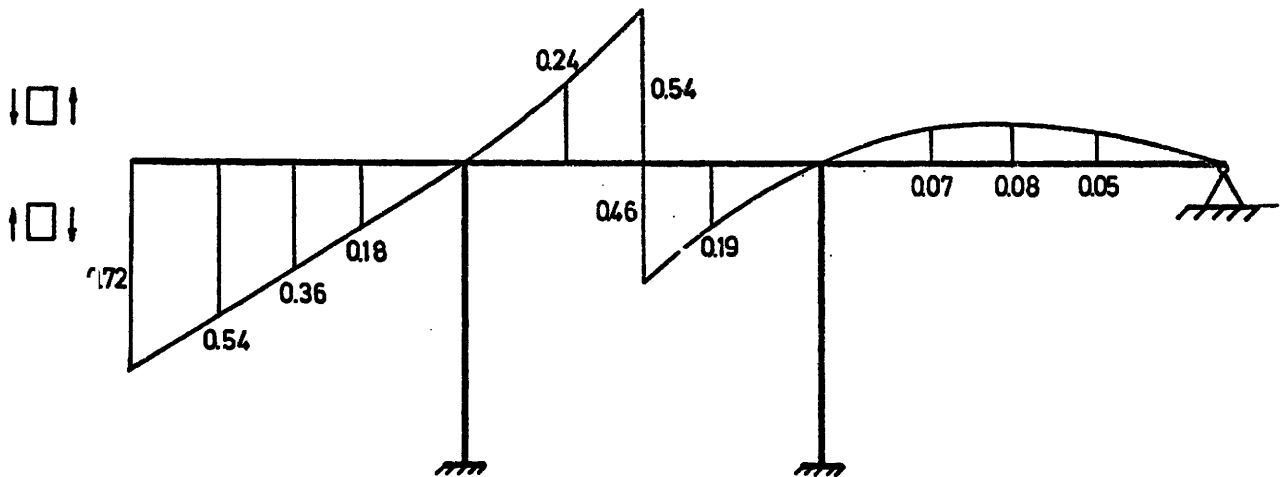


Fig. E15.2g.- Línea de influencia del cortante en B en ton.

c) Para hallar la flecha en B se aplica una fuerza - unidad en dicho punto (figura E15.2h).

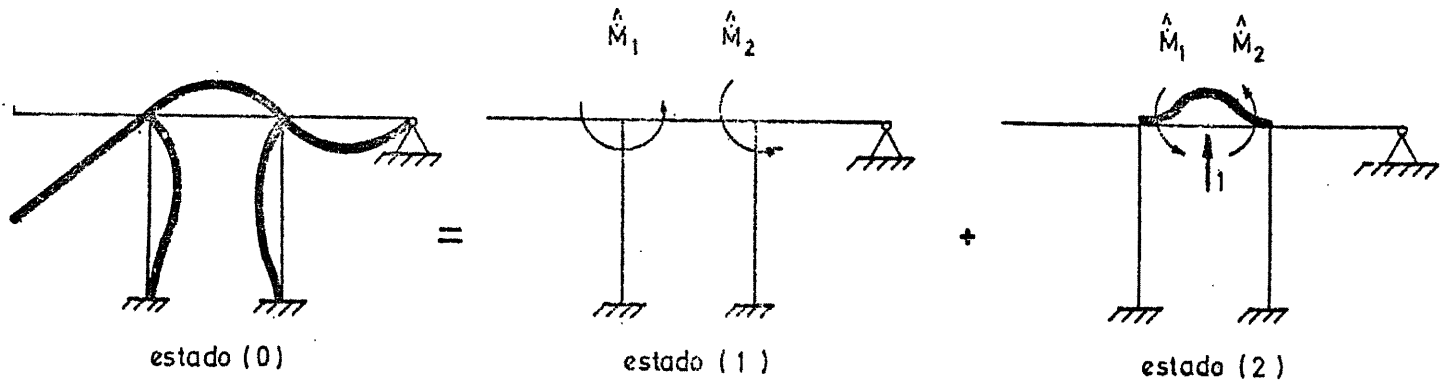


Fig. E15.2h

Teniendo en cuenta que $\hat{M}_1 = -\frac{1 \cdot 4}{8} = -0,5$ y $\hat{M}_2 = 0,5$ se resuelve el Cross del estado (1) en la tabla E15.2f.

Tabla E15.2f.

Nudo	2		3		
Barra	2-5	2-3	3-2	3-6	3-4
K	0,40	0,60	0,41	0,28	0,31
\hat{M}	0,00	-0,50	0,50	0,000	0,000
R_1	0,20	0,30	-0,20	-0,140	-0,160
T_1	0,00	-0,10	0,150	0,000	0,000
R_2	0,04	0,06	-0,062	-0,042	-0,046
Σ	0,24	-0,24	0,388	-0,182	-0,206

$$M_{23} = -0,240; \quad M_{32} = 0,388; \quad M_{34} = -0,206$$

La deformada se halla en la tabla E15.2g. sin olvidar la deformada isostática de la figura E15.2i. y se representa gráficamente en la figura E15.2j.

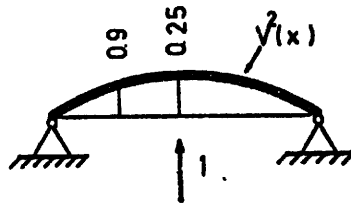


Fig. E15.2i.- Deformada isostática

$$v^2(x) = \frac{x}{48 EI} (3L^2 - 4x^2)$$

$$EI = 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,4^3 = \frac{3200}{3}$$

$$\theta_2 = \frac{0,30 + 0,06}{EI} = \frac{1,08}{3200}$$

Deformada 1 - 2		Deformada 2 - 3						Deformada 3 - 4		
$V_1 = \frac{1,08 \cdot 4000}{3200} =$		$\alpha = -0,24 \frac{16 \cdot 3}{6 \cdot 3200} 1000 = -0,6$						$\alpha = -0,206 \frac{16 \cdot 3}{6 \cdot 3200}$		
$= 1,35 \text{ mm}$		$\beta = -0,388 \frac{16 \cdot 3}{6 \cdot 3200} 1000 = -0,97$						$1000 = -0,515$		
								$\beta = 0$		

TABLA E 15.2g

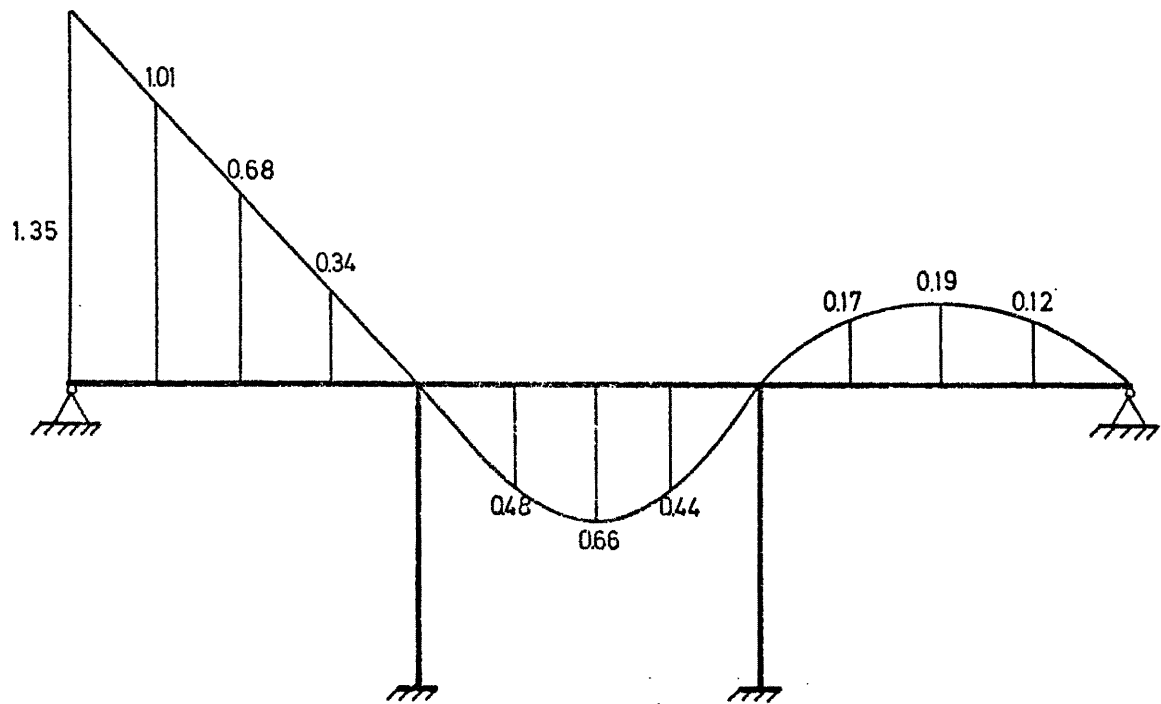


Fig. E15.2j.- Línea de influencia de la flecha en B en mm

Ejercicio E15.3.

Determinar la línea de influencia del momento flector en la sección A-A, de la viga de la figura E15.3a, cuando recorre una carga vertical del dintel.

Se darán los valores de la línea de influencia en las secciones $x = 0; 1.0; 2.5; 3.5; 5.0; 7.0; 9.0$ y 10 ,'

Se recomienda utilizar el teorema de reciprocidad.

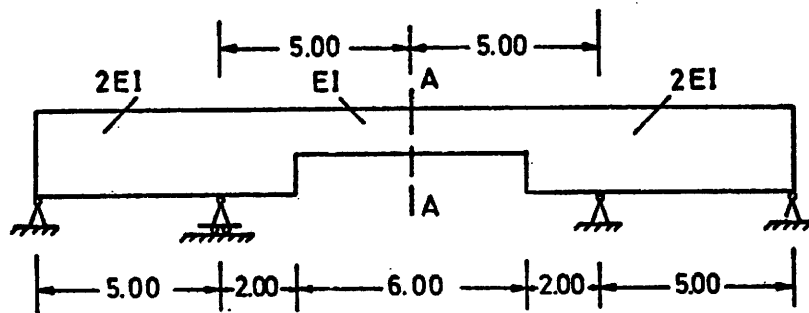


Fig. E15.3a

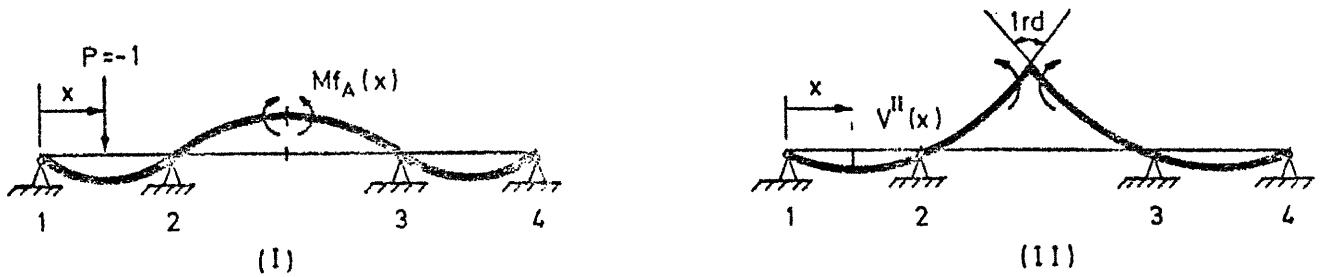
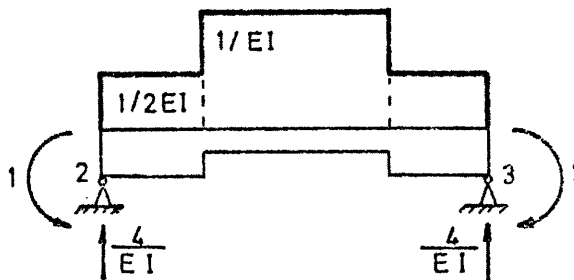


Fig. E15.3 b

Si se considera la figura E15.3b se tiene:

$$(-1)^I V^{II}(x) + M_{f_A}(x) (1 \text{ rd})^{II} = 0 \quad M_{f_A}(x) = V^{II}(x)$$

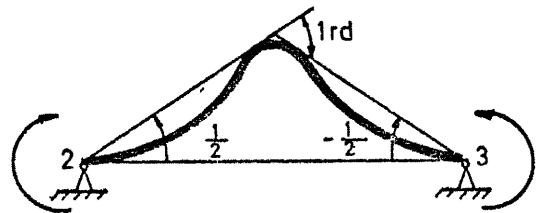


$$A = 2 \times \frac{1}{2EI} \times \frac{1}{2} + 6 \frac{1}{EI} = \frac{8}{EI}$$

$$R_s = \frac{EI}{4}$$

Rigidez simétrica de la
pieza 2-3

Fig. E15.3 c



$$M_2 = -\frac{EI}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{EI}{8}$$

$$M = \frac{EI}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{EI}{8}$$

Momentos de empotramiento
con deformación unidad en
A - A (pieza 2 - 3)

Fig. E15.3 d

Hay que resolver un Cross simétrico como el de la figura E15.3e:

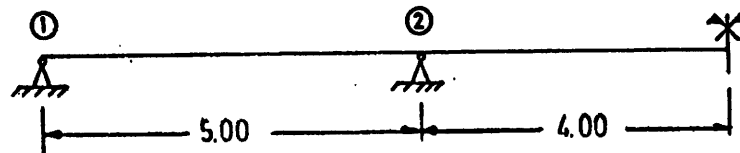


Fig. E15.3e

$$R_{21} = \frac{3EI}{L} = \frac{3(2EI)}{5} = 1,2EI$$

$$R_{S2-3} = \frac{EI}{4} = 0,25EI$$

Tabla E15.3a.

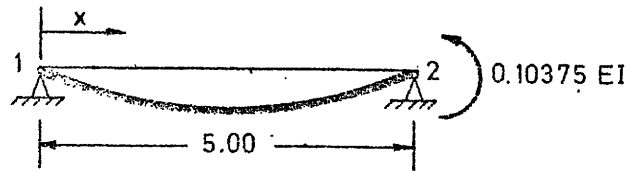
NUDO	2	
BARRA	2-1	2-3
R	1,2	0,25
K	0,83	0,17
M	0	100
Rep.	-83	-17
M _{TOTAL}	-83	83

$$M_{2-1} = \frac{-83}{100} \left(-\frac{EI}{8} \right) = 0,10375EI$$

$$M_{2-3} = \frac{83}{100} \left(-\frac{EI}{8} \right) = -0,10375EI$$

En la tabla E15.3b. se dan las deformaciones que se representan en la figura E15.3f.

TRAMO 1-2

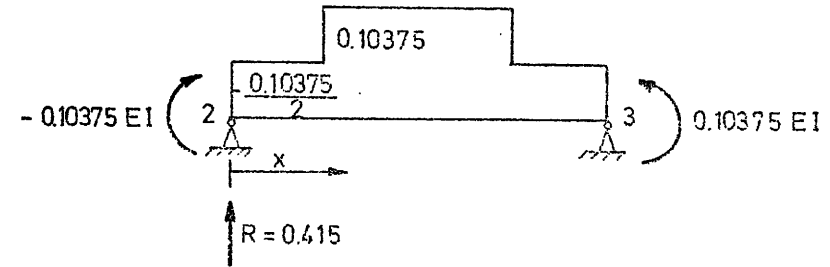


$$V = \frac{-x}{6EI L} (L^2 - x^2) \cdot M = \frac{-0.10375}{60} x (25 - x^2)$$

x	V
0	0
1	-0.042
2.5	-0.081
3.5	-0.0752
5	0

TRAMO 2-3

Aplicando Möhr



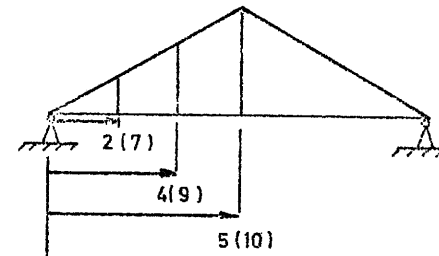
$$R = \frac{1}{2} \left\{ \frac{0.10375}{2} \cdot 2 \cdot 2 + 0.10375 \cdot 6 \right\} = 0.415$$

$$x = 2 \quad \mu f = 0.415 \cdot 2 - \frac{0.10375}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 0.7265$$

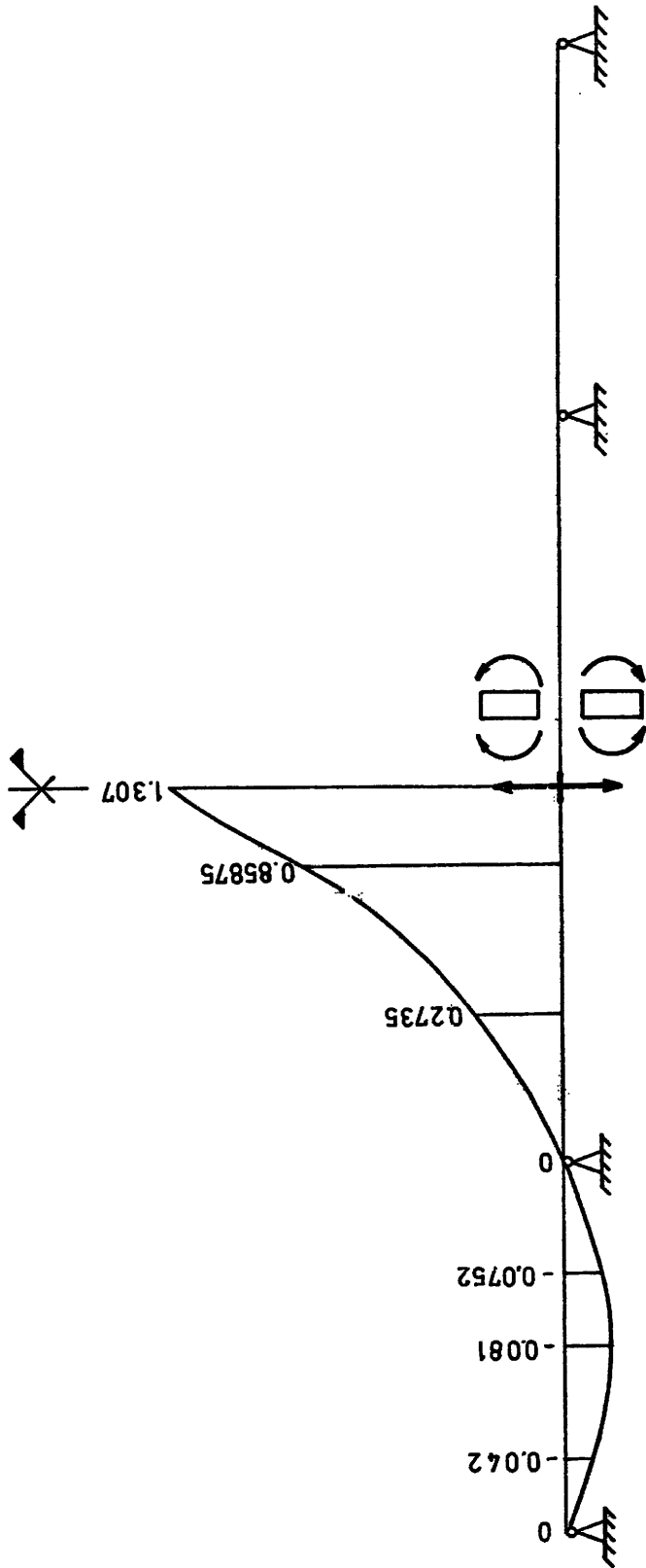
$$x = 4 \quad \mu f = 0.415 \cdot 4 - \frac{0.10375}{2} \cdot 2 \cdot 3 - 0.10375 \cdot 2 = 1.14125$$

$$x = 5 \quad \mu f = 0.415 \cdot 5 - \frac{0.10375}{2} \cdot 2 \cdot 4 - 0.10375 \cdot 3 \cdot 1.5 = 1.193$$

ISOSTATICA



x	V _{momentos}	V _{isostática}	V _{TOTAL}
7	-0.7265	1	0.2735
9	-1.14125	2	0.85875
10	-1.193	2.5	1.307



Línea de influencia ; M_f en mxt

Fig. E15.3f

Ejercicio E17.1.

En la estructura de la figura E17.1a hallar las leyes de esfuerzos axiales, de momentos flectores y cortantes, y calcular el corrimiento del punto A.

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2.$$

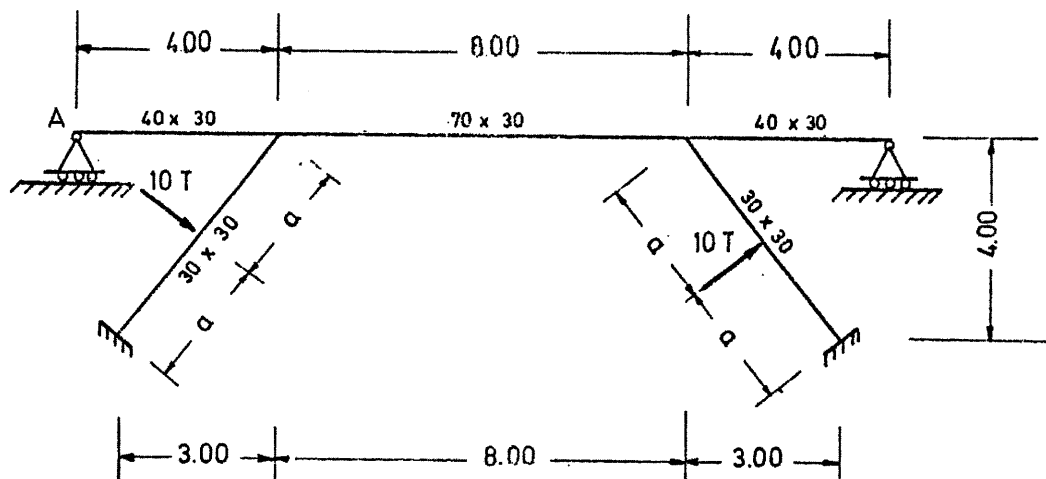


Fig. E 17.1 a

El ejercicio se resuelve en dos estados que se indican en la figura E17.1b.

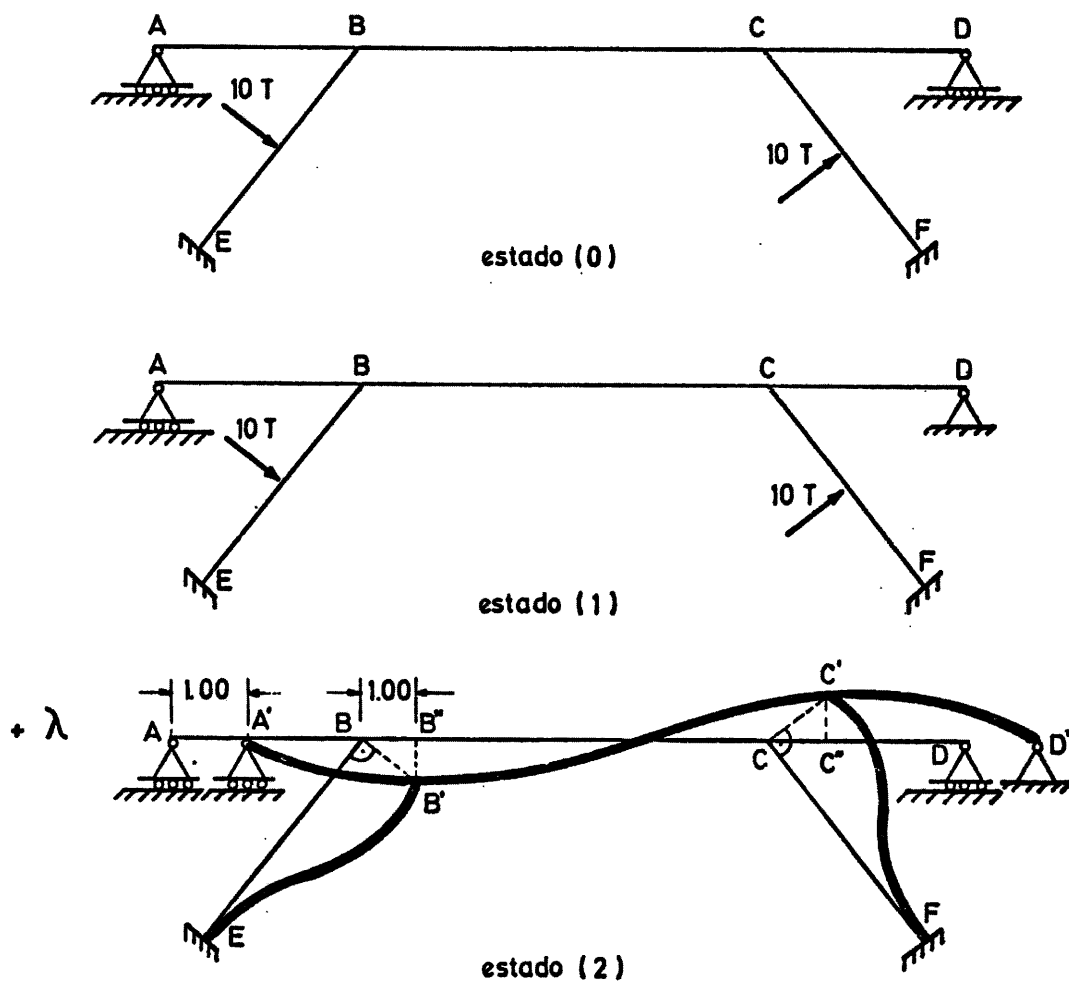


Fig. E17. 1b

El estado (1) es el mismo que el del ejercicio E13.1.

En el estado (2) se tiene:

$$\overline{AA'} = \overline{BB''} = \overline{CC''} = \overline{DD'} = \lambda; \quad \overline{BB'} = \overline{CC'} = \frac{5}{4}\lambda; \quad \overline{B'B''} = \overline{C'C''} = \frac{3}{4}\lambda$$

Momentos de empotramiento:

$$\hat{M}_{BA} \approx \frac{3 \cdot 4^3 \cdot \frac{3}{4}\lambda}{4^2} = 9\lambda = \hat{M}_{CD} = 18,7 \cdot K$$

$$\hat{M}_{BC} = \hat{M}_{CB} \approx -\frac{6 \cdot 7^3 \cdot \frac{6}{4}\lambda}{8^2} = -48,234\lambda = -100 \cdot K$$

$$\hat{M}_{BE} = \hat{M}_{EB} = \hat{M}_{CF} = \hat{M}_{FC} \approx \frac{6 \cdot 3^3 \cdot \frac{5}{4}\lambda}{5^2} = 8,10\lambda = 16,8 \cdot K$$

El Cross del estado (2) se expresa en la tabla E17.1a y el resultado final se esquematiza en la figura E17.1c.

Tabla E17.1a.

Nudo	B		
Barra	BC	BE	BA
γ	0,31	0,5	
R	64,31	5,40	12,00
K	0,79	0,06	0,15
\hat{M}	-100,00	16,80	18,70
M^I	-51,00	3,80	9,70
Σ	-49,00	20,60	28,40

$$M_{EB} = 16,8 + \frac{1}{2} (20,6 - 16,8) = 18,7 \text{ m} \cdot t$$

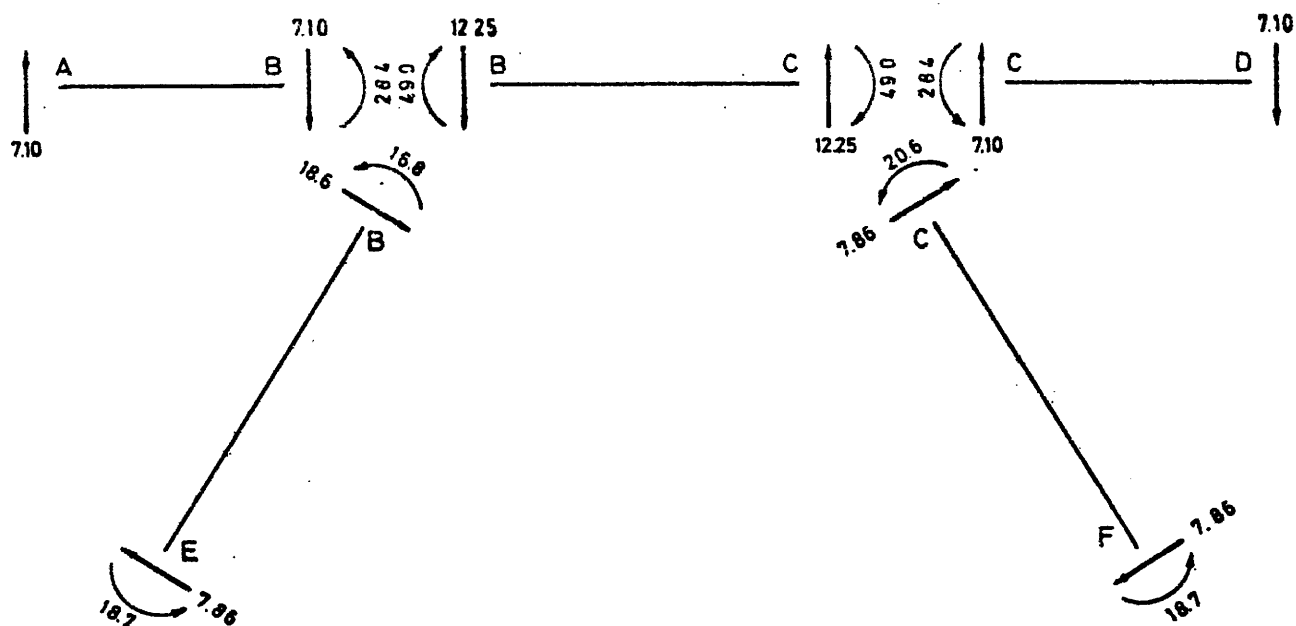


Fig. E17.1c.- Flectores y cortantes en extremos de barra en el estado (2).

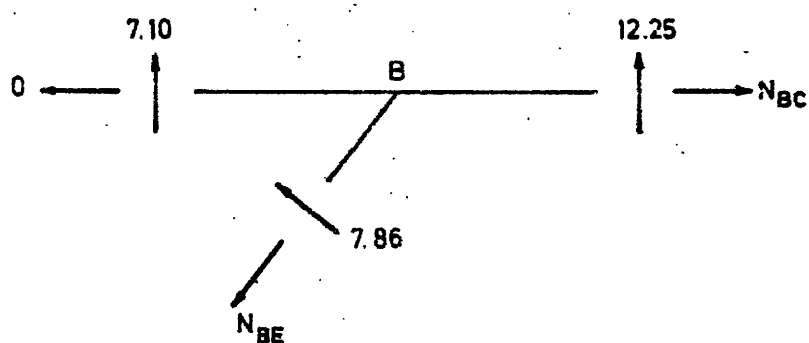


Fig. E17.1d

Al plantear el equilibrio del nudo B en el estado (2), (figura E17.1d) se obtienen los axiles en las barras concurrentes en el citado nudo, como sigue:

Equilibrio de fuerzas verticales:

$$N_{BE} = \frac{5}{4} (7,10 + 12,25 + 7,86 \cdot \frac{3}{5}) = 30,08 \text{ T}$$

Por antimetría:

$$N_{FC} = -30,08 \text{ T (compresión) .}$$

Equilibrio de fuerzas horizontales:

$$N_{BC} = 7,86 \cdot \frac{4}{5} + 30,08 \cdot \frac{3}{5} = 24,34 \text{ T}$$

Planteando el equilibrio de fuerzas horizontales en el nudo B, en el estado final, resulta:

$$2 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} - 2 \cdot 5,11 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot 4,92 \cdot \frac{3}{5} - K (2 \cdot 7,86 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot 30,08 \cdot \frac{3}{5}) = 0$$

$$K = 0,282$$

$$\text{Entonces } E_0 = E_1 + 0,282 E_2$$

E_0 = esfuerzos del estado (0)

E_1 = esfuerzos del estado (1)

E_2 = esfuerzos del estado (2)

Las leyes de flectores, cortantes y axiles están en las figuras E17.1f. E17.1g. y E17.1h.

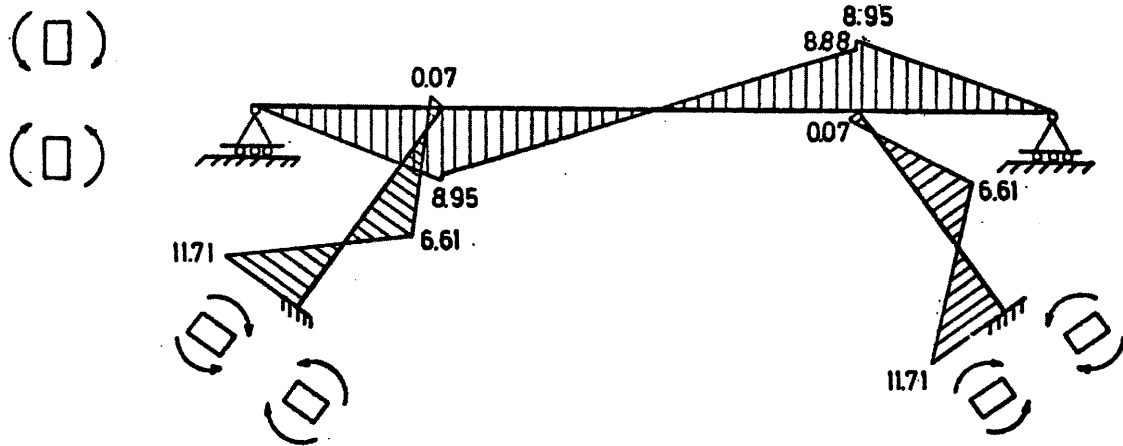


Fig. E17.1f.- Ley de momentos flectores

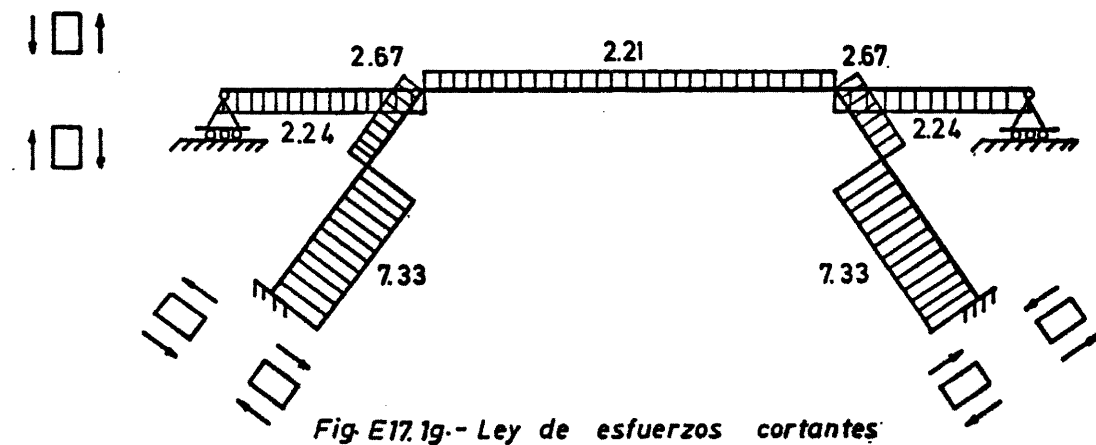


Fig. E17.1g.- Ley de esfuerzos cortantes

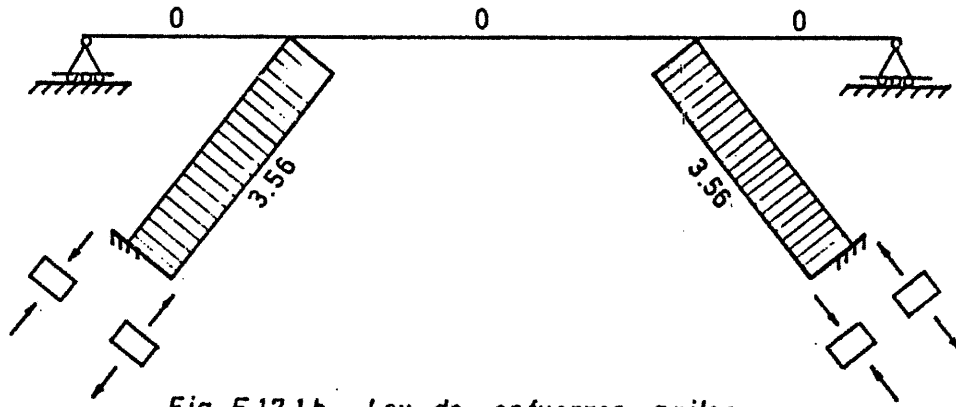


Fig. E17.1h.- Ley de esfuerzos axiales

El corrimiento del punto A será:

$$\hat{M}_{BA} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,3 \cdot 0,4}{12} \cdot \frac{3\lambda}{4}}{4^2} = 18,7 \cdot 0,282$$

$$\lambda = d_{xA} = d_A = 1,17 \text{ cm (hacia la derecha)}$$

Ejercicio E18.1.

En la estructura de la figura E18.1a. sometida a una carga de 10 t. en el punto B, hallar las leyes de esfuerzos en todas las barras y el movimiento total del nudo C.

Para todas las barras: canto x ancho = 0,60 . 0,40 m

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2.$$

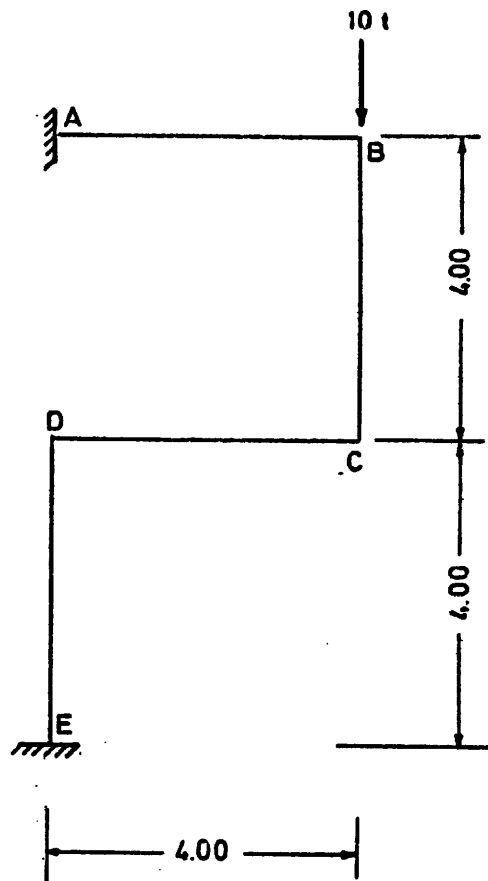


Fig. E 18.1 a

Para resolver el ejercicio se tienen en cuenta los 3 estados de la figura E18.1b.

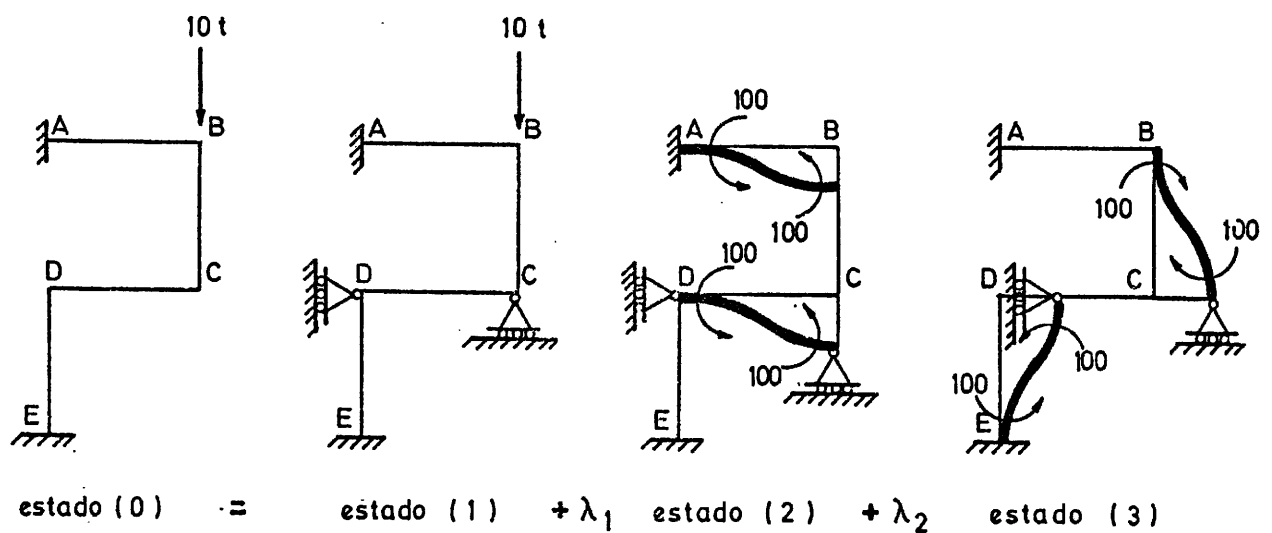


Fig. E 18. 1 b

La resolución de los estados (2) y (3) se hace en las tablas E18.1a y E18.1b.

Tabla E18.1a Estado (2)

Nudo	B		C		D	
Barra	BA	BC	CB	CD	DC	DE
Y	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
R	1440,	1440	1440	1440	1440	1440
K	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
\hat{M}	100,0	0,0	0,0	100,0	100,0	0,0
M^I	-50,0	-50,0	-50,0	-50,0	-50,0	-50,0
M^{II}	0,0	-25,0	-25,0	-25,0	-25,0	0,0
M^{III}	12,5	12,5	25,0	25,0	12,5	12,5
M^{IV}	0,0	12,5	6,2	6,2	12,5	0,0
M^V	-6,3	-6,2	-6,2	-6,2	-6,2	-6,3
M^{VI}	0,0	-3,1	-3,1	-3,1	-3,1	0,0
M^{VII}	1,6	1,5	3,1	3,1	1,5	1,6
M^{VIII}	0,0	1,6	0,8	0,8	1,6	0,0
M^{IX}	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8
M^X	0,0	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	0,0
M^{XI}	0,2	0,2	0,4	0,4	0,2	0,2
Σ	57,2	-57,2	-50,0	50,0	42,8	-42,8

$$M_{AB} = 100 + \frac{1}{2} (57,2 - 100) = 78,6; \quad M_{ED} = - \frac{42,8}{2} = -21,4$$

Tabla E18.1b. Estado (3)

Nudo	B		C		D	
Barra	BA	BC	CB	CD	DC	DE
γ	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
R	1440	1440	1440	1440	1440	1440
K	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
\hat{M}	0,0	-100,0	-100,0	0,0	0,0	100,0
M^I	50,0	50,0	50,0	50,0	-50,0	-50,0
M^{II}	0,0	25,0	25,0	-25,0	25,0	0,0
M^{III}	-12,5	-12,5	0,0	0,0	-12,5	-12,5
M^{IV}	0,0	0,0	-6,2	-6,2	0,0	0,0
M^V	0,0	0,0	6,2	6,2	0,0	0,0
M^{VI}	0,0	3,1	0,0	0,0	3,1	0,0
M^{VII}	-1,5	-1,6	0,0	0,0	-1,6	-1,5
M^{VIII}	0,0	0,0	-0,8	-0,8	0,0	0,0
M^{IX}	0,0	0,0	0,8	-0,8	0,0	0,0
M^X	0,0	0,4	0,0	0,0	0,4	0,0
M^{XI}	-0,2	-0,2	0,0	0,0	-0,2	-0,2
Σ	35,8	-35,8	-25,0	25,0	-35,8	35,8

Planteando las ecuaciones de equilibrio de las figuras E18.1c y E18.1d se tiene:

$$Q_{BA} + Q_{CD} - 10,00 = 0$$

$$Q_{DE} + Q_{CB} = 0$$

$$\frac{78,6 + 57,2}{4} \lambda_1 + \frac{42,8 + 50,0}{4} \lambda_1 + \frac{17,9 + 35,8}{4} \lambda_2 +$$

$$+ \frac{-35,8 + 25,0}{4} \lambda_2 - 10,0 = 0$$

$$\frac{42,8 + 21,4}{4} \lambda_1 - \frac{57,2 + 50,0}{4} \lambda_1 - \frac{35,8 + 67,9}{4} \lambda_2 -$$

$$- \frac{35,8 + 25,0}{4} = 0$$

$$228,6 \lambda_1 + 42,9 \lambda_2 = 40 \quad \lambda_1 = 0,184$$

$$-43,0 \lambda_1 - 164,5 \lambda_2 = 0 \quad \lambda_2 = -0,048$$

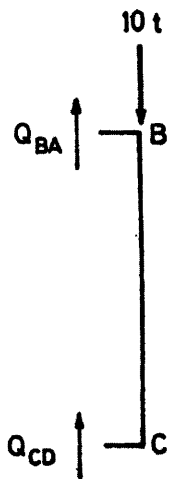


Fig. E18.1c

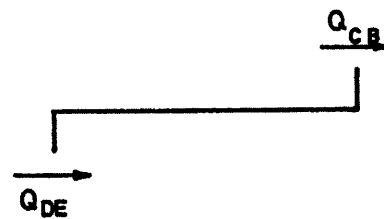


Fig. E18.1d

El estado final es el resultado de la combinación de los estados (1), (2) y (3) de la figura E18.1b:

$$E_0 = E_1 + \lambda_1 E_2 + \lambda_2 E_3$$

Los flectores y cortantes en extremos de barra se representan en la figura E18.1e.

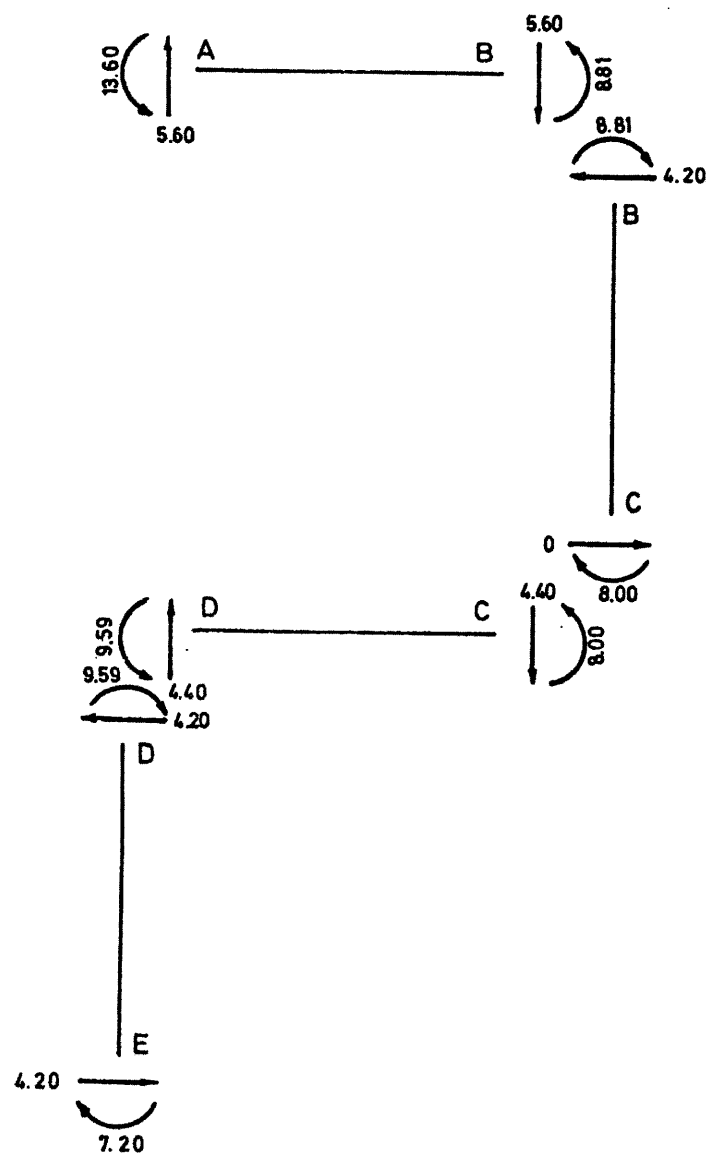


Fig. E 18. 1e

La ley de momentos flectores se esquematiza en la figura E18. 1f.

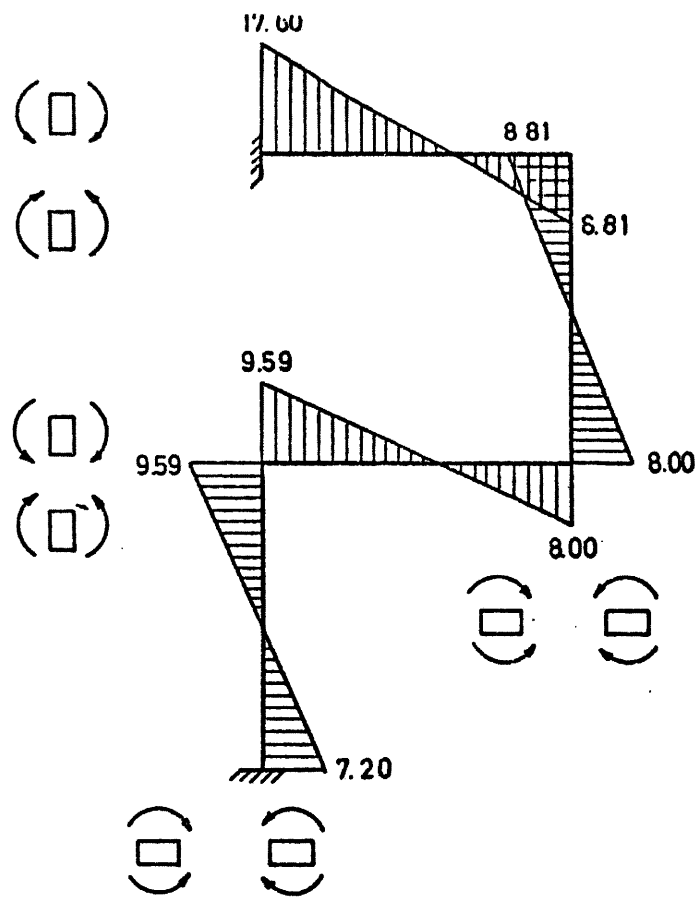


Fig. E18.1f.- Ley de momentos flectores

Las leyes de cortantes y de axiles se representan en las figuras E18.1g y E18.1h.

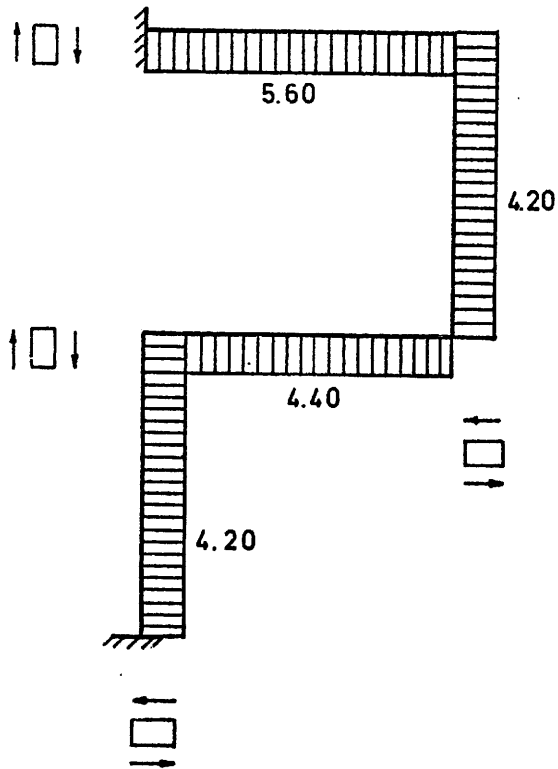


Fig. E18.1g.- Ley de cortantes

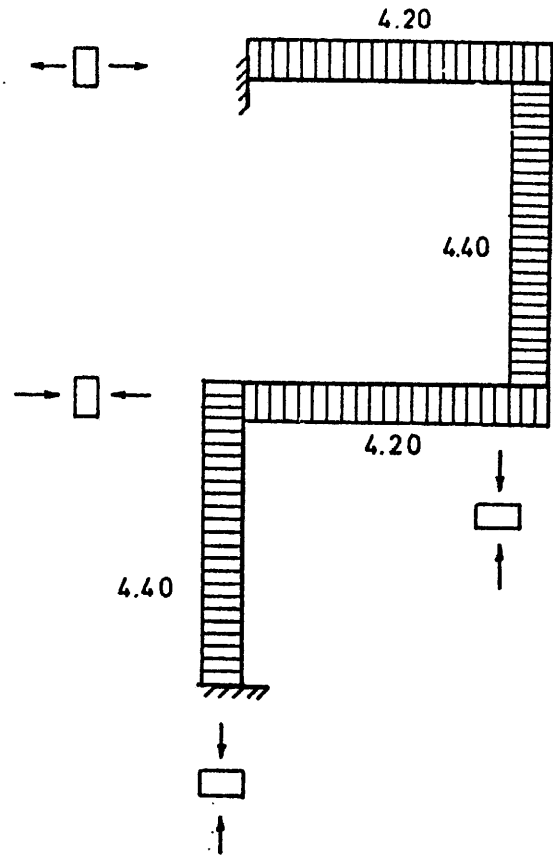


Fig. E18.1h.- Ley de axiles

El movimiento del punto C se puede calcular como sigue:

$$\frac{6EI}{L^2} d_{xc} = -100 \cdot 0,048 = -4,80 = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,60^3}{12} \cdot 0,40}{4^2} d_{xc}$$

$$d_{xc} = -\frac{4,80 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 4 \cdot 10^2} ; d_{xc} = -0,089 \cdot 10^{-2} \text{ m} = -0,89 \text{ mm.}$$

$$\frac{6EI}{L^2} d_{yc} = 100 \cdot 0,184 = 18,4 = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,60^3}{12} \cdot 0,40}{4^2} d_{yc}$$

$$d_{YC} = \frac{18,4 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 4 \cdot 10^2} ; d_{YC} = 0,341 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 3,41 \text{ mm}$$

Giro a partir de la barra B-C:

$$\begin{aligned} \theta_C = & - \frac{0,089 \cdot 10^{-2}}{10} - \frac{8,00 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,6^3 \cdot 0,4}{12}} + \\ & + \frac{8,81 \cdot 4}{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,6^3 \cdot 0,4}{12}} = -0,05553 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \end{aligned}$$

Giro a partir de la barra C-D :

$$\begin{aligned} \theta_C = & - \frac{0,341 \cdot 10^{-2}}{4} + \frac{8,00 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,6^3 \cdot 0,4}{12}} - \\ & - \frac{9,59 \cdot 4}{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,6^3 \cdot 0,4}{12}} = -0,05558 \cdot 10^{-2} \text{ rad.} \end{aligned}$$

Ejercicio E18.2.

En la estructura de la figura E18.2a las semibarras AO_1 , BO_1 , BO_2 y CO_2 son idénticas entre sí e iguales a una barra 1-2 cuyas características elastomecánicas se indican a continuación:

$$R_{12} = 1,5 \cdot 10^4 \text{ mt}$$

$$R_{21} = 1,0 \cdot 10^4 \text{ mt}$$

$$\gamma_{12} = 0,40$$

Bajo carga uniforme $p = 1,0 \text{ tm}^{-1}$, los momentos de empotramiento rígido que aparecen en la barra 1-2 son:

$$M_1 = 0,50 \text{ mt}$$

$$M_2 = -0,30 \text{ mt}$$

Se pide determinar el ángulo de giro del nudo B, supuesto el soporte BD de sección cuadrada $0,50 \cdot 0,50 \text{ m}$ y un módulo de elasticidad de 300.000 Kg/cm^2 .

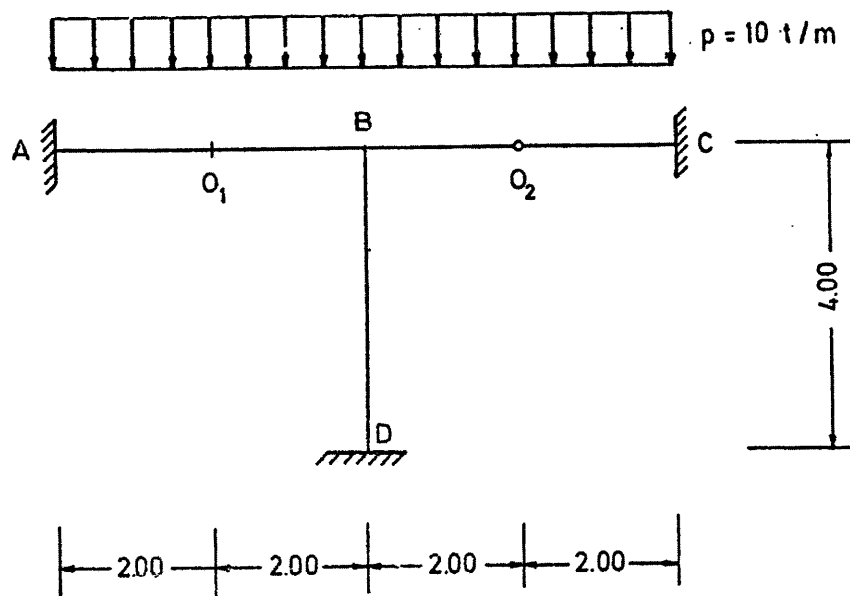


Fig. E 18.2 a

En la pieza 1-2 se deduce:

$$\gamma_{21} = \frac{R_{12}}{R_{21}} \gamma_{12} = 0,60$$

En la pieza A-B se tiene:

$$R_s = \frac{R_{12} R_{21} (1 - \gamma_{12} \gamma_{21})}{R_2 (1 + \gamma_{21}) + R_1 (1 + \gamma_{12})} = \frac{1,5 + 1,0 (1 - 0,4 \cdot 0,6)}{1 (1 + 0,6) + 1,5 (1 + 0,4)} 10^4 =$$

$$= 0,308 \cdot 10^4 \text{ mt}$$

$$R_A = R_1 (1 - \gamma_{12} \gamma_{21}) = 1,5 \cdot 10^4 (1 - 0,4 \cdot 0,6) =$$

$$= 1,14 \cdot 10^4 \text{ mt}$$

Las rigideces y las transmisiones serán:

$$R_{12} = R_{21} = \frac{1}{2} (R_s + R_A) = \frac{1}{2} (1,14 + 0,308) \cdot 10^4 =$$

$$= 0,724 \cdot 10^4 \text{ mt}$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{R_A - R_s}{R_A + R_s} = \frac{1,14 - 0,308}{1,14 + 0,308} = 0,575$$

Si se consideran las figuras E18.2b. y E18.2c. -

que indican los momentos de empotramiento perfecto, y se obliga a que el cortante en O_1 sea cero por simetría, se tiene:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{0,50 - 0,30}{2} - \lambda \frac{1,05 + 0,8}{2} \cdot 10^4 = 0;$$

$$\lambda = 0,973 \cdot 10^{-4}$$

$$\hat{M}_A = 0,50 + 0,973 \cdot 1,05 = 1,522 \text{ mt} = -\hat{M}_B$$

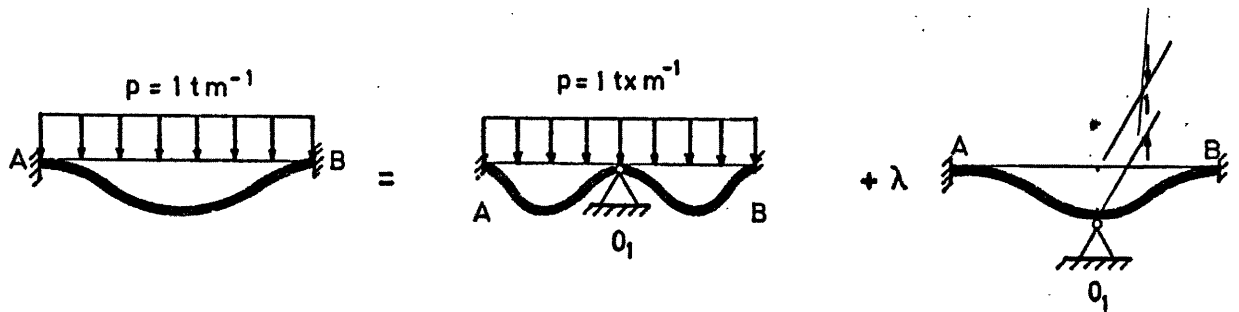


Fig. E18.2 b

$$\hat{M}_1 = (R_{12} + R_{21} \gamma_{21}) \frac{\lambda}{L} = 105 \cdot 10^{-4}$$

$$M = (R_{21} + R_{12} \gamma_{12}) \frac{\lambda}{L} = 0,8 \cdot 10^{-4}$$

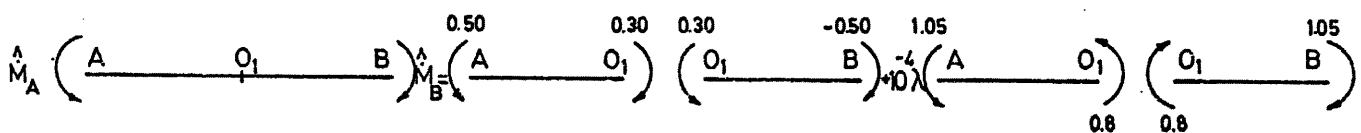


Fig. E18.2 c

En la pieza B-C se cumple:

$$R_{12} = R_{21} = \frac{R_{12}^2 (1 - \gamma_{12} \gamma_{21})^2}{2 R_{21} (1 - \gamma_{12} \gamma_{21})} = \frac{1,5^2 \cdot 0,76^2 \cdot 10^4}{2 \cdot 1,5 \cdot 0,76} = 0,57 \cdot 10^4$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = 1$$

Teniendo en cuenta la figura E18.2d y obligando a que el momento en 0_2 sea cero se tiene:

$$M_{02} = 4P - 2P - \hat{M}_B = 0 ; \quad \hat{M}_B = 2P = 2 \text{ mxt} = -\hat{M}_C$$

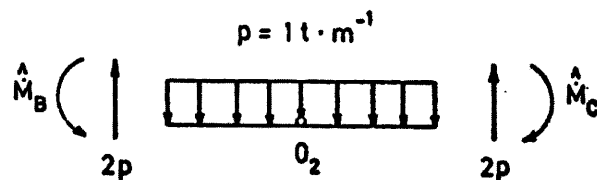


Fig. E18. 2 d

En el soporte la rigidez es:

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 0,5^4}{12 \cdot 4} = 1,563 \cdot 10^4$$

En el nudo B los coeficientes de reparto son:

$$K_{BA} = \frac{0,724}{2,859} = 0,254; \quad K_{BC} = \frac{0,57}{2,859} = 0,199; \quad K_{DB} = \frac{1,563}{2,859} = 0,547$$

En la tabla E18.2a se efectúa el Cross de la estructura:

Tabla E18.2a.

Nudo	B		
Barra	BA	BC	BD
γ	0,575	1	0,5
R	$0,724 \cdot 10^4$	$0,57 \cdot 10^4$	$1,563 \cdot 10^4$
K	0,254	0,199	0,547
\hat{M}	-1,522	2,000	0,000
M^I	-0,121	-0,095	-0,262
Σ	-1,643	1,905	-0,262

El giro pedido será:

$$\theta_B = \frac{-0,262}{1,563 \cdot 10^4} = -0,167 \cdot 10^{-4} \text{ radianes}$$

Ejercicio E18.3.

En la estructura reticulada de la figura E18.3a, se pide:

- 1) Grado de tralacionalidad.
- 2) Estados paramétricos.
- 3) Movimiento total del punto A.

Todas las barras son de hormigón, de sección $0,20 \cdot 0,50 \text{ m}^2$ y módulo de elasticidad $E = 3 \cdot 10^6 \text{ t.m}^{-2}$.

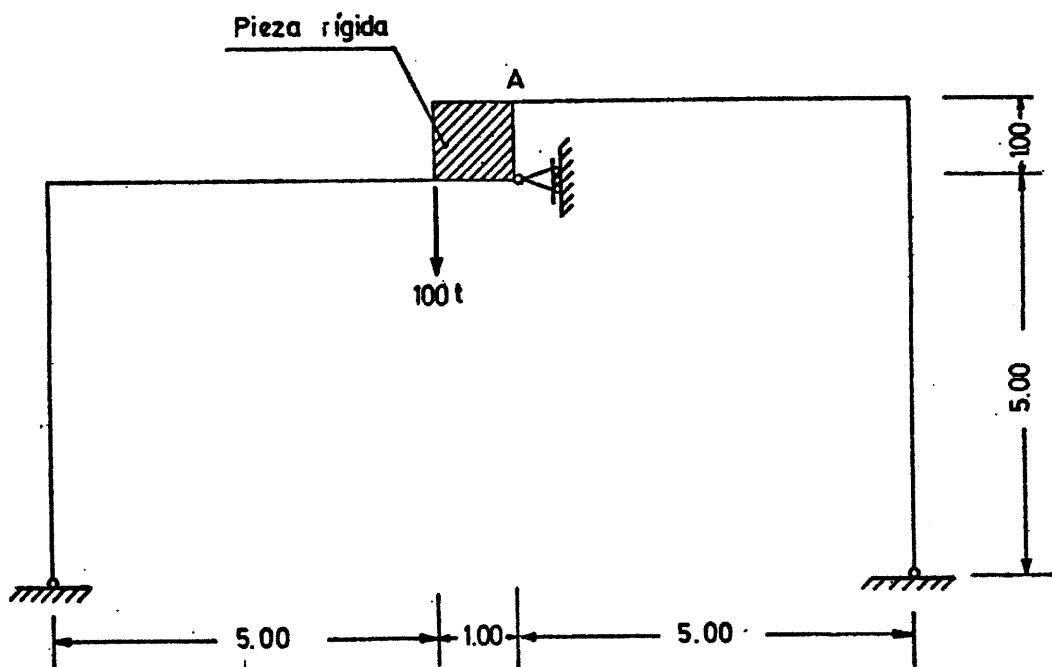


Fig. E 18. 3a

1 y 2) El grado de tralacionalidad es $\alpha = 2$ y los estados paramétricos que se consideran son los que siguen:

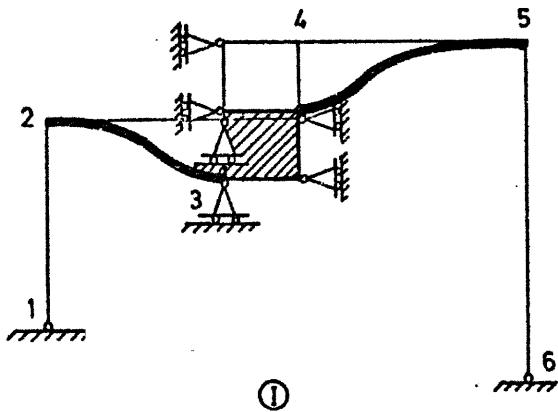


Fig. E18.3 b

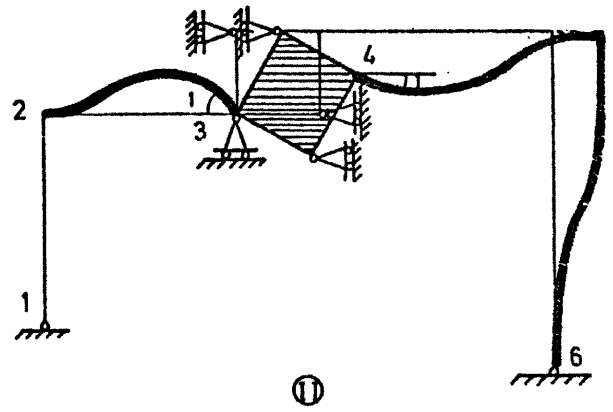


Fig. E18.3 c

3)

$$EI = 3 \cdot 10^6 \frac{1}{12} 0,2 \cdot 0,5^3 \frac{1}{4} 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = \frac{10^2}{2} 5^3 \cdot 10 =$$

$$= 5^4 \cdot 10 = 6250 \text{ t.m}^2$$

$$\hat{M}_{23} = \hat{M}_{32} = \frac{6EI}{L^2} 1 = 6 \cdot \frac{6250}{25} = 1500$$

$$\hat{M}_{45} = \hat{M}_{54} = -1500$$

ESTADO I

Nudo	2		5	
Barra	2-1	2-3	5-4	5-6
R	0,8	0,8	0,80	0,67
K	0,5	0,5	0,55	0,45
\hat{M}	0	1500	-1500	0
R^I	-750	-750	825	675
Σ	-750	750	-675	675

$$M_{12} = -375$$

$$M_{32} = (750 - 1500) 0,5 + 1500 = 1125$$

$$M_{45} = (-675 + 1500) 0,5 - 1500 = -1087,5$$

$$M_{65} = 337,5$$

$$Q_{21} = - \frac{-750 - 375}{5} = 225$$

$$Q_{23} = Q_{32} = - \frac{750 + 1125}{5} = -375$$

$$Q_{45} = Q_{54} = - \frac{-1087,5 - 675}{5} = 352,5$$

$$Q_{56} = Q_{65} = - \frac{1}{6} (337,5 + 675) = -168,75$$

$$\hat{M}_{32} = - \frac{4EI}{L} \cdot 1 = - \frac{4 \cdot 6250}{5} = -5000$$

$$\hat{M}_{23} = -2500$$

$$\hat{M}_{45} = - \frac{6EI}{L^2} \cdot 1 - \frac{4EI}{L} \cdot 1 = -1500 - 5000 = -6500$$

$$\hat{M}_{54} = -1500 - 2500 = -4000$$

$$\hat{M}_{56} = \hat{M}_{65} = \frac{6EI}{L^2} \cdot 1 = \frac{6 \cdot 6250}{36} = 1042$$

ESTADO II

Nudo	2		5	
Barra	2-1	2-3	5-4	5-6
R				
K	0,5	0,5	0,55	0,45
\hat{M}	0	-2500	-4000	1042
R^I	1250	1250	1627	1331
Σ	1250	-1250	-2373	2373

$$M_{12} = 625$$

$$M_{32} = (-1250 + 2500) \cdot 0,5 - 5000 = -4375$$

$$M_{45} = (-2373 + 4000) \cdot 0,5 - 6500 = -56,5$$

$$M_{65} = (2373 - 1042) \cdot 0,5 + 1042 = 1707,5$$

$$Q_{21} = -\frac{1}{5} (625+1250) = -375$$

$$Q_{23} = Q_{32} = -\frac{1}{5} (-1250-4375) = 1125$$

$$Q_{45} = Q_{54} = -\frac{1}{5} (-5686,5-2373) = 1611,9$$

$$Q_{56} = Q_{65} = -\frac{1}{6} (2373+1707,5) = -680,1$$

Para hallar los parámetros se tiene en cuenta la figura E18.3d.

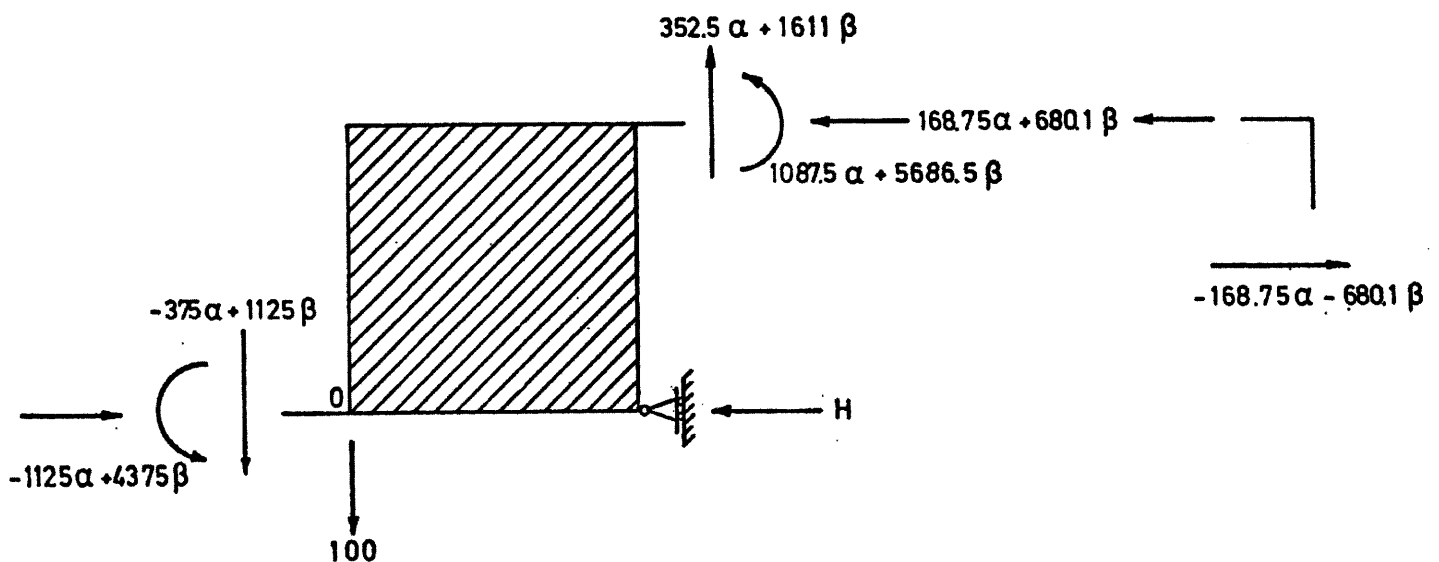


Fig. E18.3d

Equilibrio de fuerzas verticales;

$$727,5\alpha + 486,9\beta = 100$$

Equilibrio de momentos en 0:

$$483,75\alpha + 12353,5\beta = 0$$

$$\alpha = 0,1411554$$

$$\beta = -0,0055275$$

Los desplazamientos en A son:

$$d_{xA} = \beta \quad d_{yA} = \alpha + \beta \quad ; \quad \theta_A = \beta$$

Resulta, pues:

$$d_{xA} = 5,53 \text{ mm hacia la izquierda}$$

$$d_{yA} = 13,56 \text{ cm hacia abajo}$$

$$\theta_A = 5,53 \cdot 10^{-3} \text{ rd sentido antihorario}$$

Ejercicio E18.4.

En la estructura de la figura E18.1a se pide:

- 1) Leyes de esfuerzos en todas las barras.
- 2) Giro del nudo D.

Características de las barras:

Pilares: sección cuadrada de 0,40 m de lado.

Arco y dintel: canto de 0,80 m y ancho de 0,40 m.

Módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$.

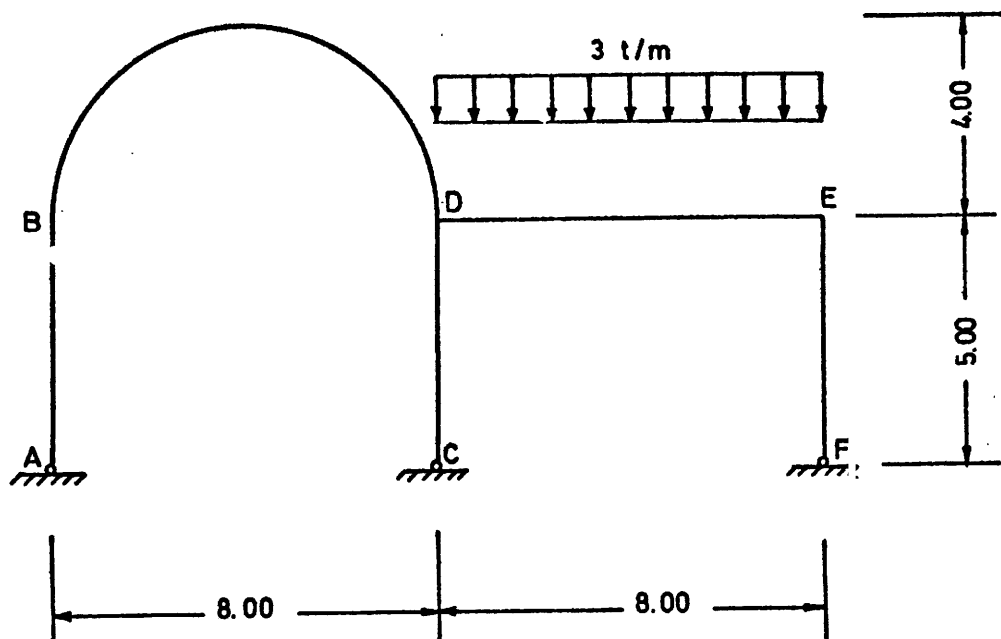


Fig. E 10. 4 a

El grado de tralacionalidad es 2 y el problema se puede resolver como se indica en la figura E18.4b.

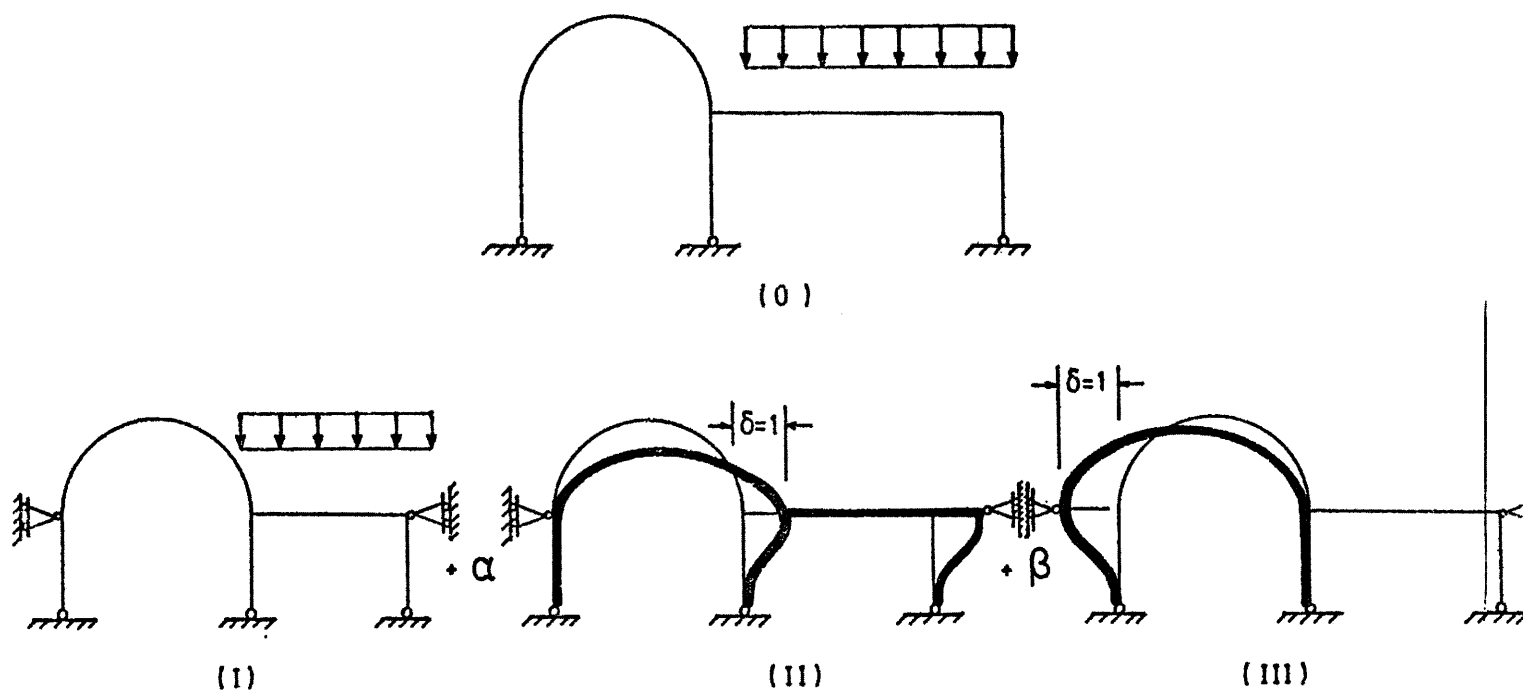


Fig. E18.4 b

Interesa para el cálculo saber la rigidez del arco y el momento de empotramiento perfecto debido a $\delta=1$. Sólo se considera la deformación por flexión del arco. (Figuras E18.4c y E28.4d).

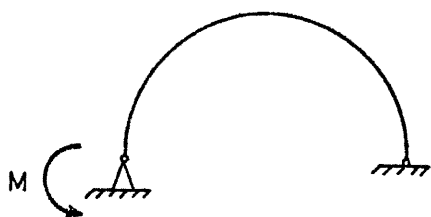


Fig. E18.4 c

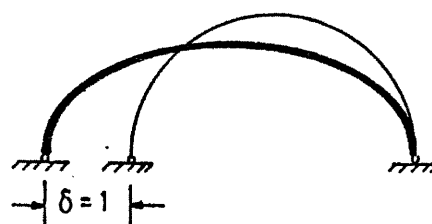


Fig. E18.4 d

Teniendo en cuenta la figura E18.4e se tiene:

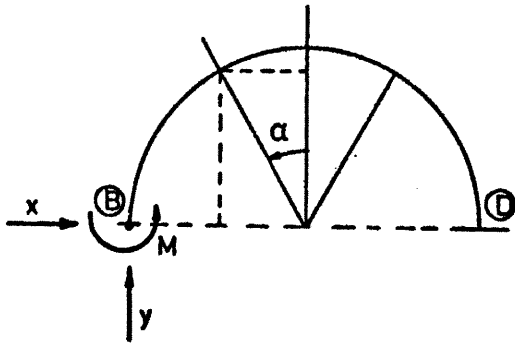


Fig. E 18. 4 e

$$dW = \frac{1}{2} M f^2 \frac{ds}{EI}$$

$$dW = \frac{1}{2} \{M + X \cdot r \cos \alpha - Y r (1 - \sin \alpha)\}^2 \frac{r d\alpha}{EI} ;$$

$$r = 4 \text{ m}$$

$$W = \frac{2}{EI} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \{M + 4 X \cos \alpha - 4 Y (1 - \sin \alpha)\}^2 d\alpha$$

Obligando a que los desplazamientos horizontal y vertical en B sean nulos:

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{4}{EI} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{M + 4 X \cos \alpha - 4 Y (1 - \sin \alpha)\} 4 \cos \alpha d\alpha = 0 \quad \{E18.4a.\}$$

$$\frac{\partial W}{\partial Y} = \frac{4}{EI} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{M + 4 X \cos \alpha - 4 Y (1 - \sin \alpha)\} \{-4 (1 - \sin \alpha)\} d\alpha = 0 \quad \{E18.4b.\}$$

A partir de E18.4a

$$0 = M \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha + 4X \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha d\alpha - 4Y \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha + 4Y \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha d\alpha = 0$$

$$0 = 2M + 8X \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - 8Y$$

$$\boxed{M + \pi X - 4Y = 0} \quad \{E18.4c\}$$

A partir de E18.4b:

$$0 = -M \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha + M \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen} \alpha \, d\alpha - 4X \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, d\alpha + 4X \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen} \alpha \cos \alpha \, d\alpha +$$

$$+ 4Y \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha - 8Y \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen} \alpha \, d\alpha + 4Y \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2 \alpha \, d\alpha = 0 \quad \{\text{E18.4d.}\}$$

$$0 = -2M \frac{\pi}{2} - 8X + 8Y \frac{\pi}{2} + 8Y \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{-\pi M - 8X + 6\pi Y = 0}$$

Resolviendo el sistema {E18.4c.} y {E18.4d.}:

$$\begin{aligned} \pi X - 4Y &= -M \\ -8X + 6\pi Y &= \pi M \end{aligned} \quad X = \frac{-\pi}{3\pi^2 - 16} M ; \quad Y = \frac{\pi^2 - 8}{6\pi^2 - 32}$$

$$\boxed{X = -0,2308 \, M}$$

$$\boxed{Y = 0,0687 \, M}$$

Cálculo del giro en B:

$$\theta_3 = \frac{\partial W}{\partial M} = \frac{4}{EI} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{M + 4X \cos \alpha - 4Y(1 - \text{sen} \alpha)\} d\alpha = \frac{4}{EI} M \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha +$$

$$+ \frac{16}{EI} X \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, d\alpha - \frac{16}{EI} Y \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha + \frac{16}{EI} Y \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen} \alpha \, d\alpha$$

$$\theta_3 = \frac{8}{EI} M \frac{\pi}{2} + \frac{32}{EI} X - \frac{32}{EI} Y \frac{\pi}{2}; \quad \theta_3 = \frac{M}{EI} \{4\pi - 32 \, 0,2308 - 16\pi \, 0,0687\}$$

$$\theta_B = 1,727532 \frac{M}{EI}; \quad R_{BD} = R_{DB} = \frac{M}{\theta_B} = 0,57886 EI$$

El momento en D será:

$$M' = -M + 8Y = -(1 - 8 \cdot 0,0687)M = -0,4504$$

Por tanto:

$R_{BD} = R_{DB} = 0,57886 EI$ $Y_{BD} = Y_{DB} = -0,4504$
--

El momento de empotramiento perfecto debido a $\delta=1$ es (figura E18.4f):

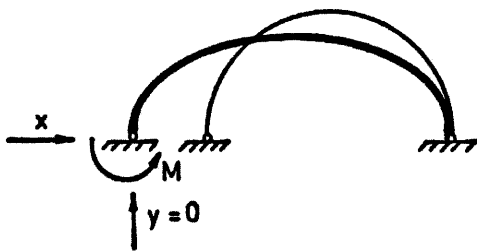


Fig. E 18. 4 f

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{4}{EI} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{M + 4X \cos \alpha\} 4 \cos \alpha \, d\alpha = -1 \quad \{E18.4e\}$$

$$\frac{\partial W}{\partial Y} = \frac{4}{EI} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{M + 4X \cos \alpha\} \{-4(1 - \sin \alpha)\} d\alpha = 0 \quad \{E18.4f\}$$

De E18.4f:

$$-4M \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha + 4M \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \, d\alpha - 16X \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, d\alpha + 16X \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha = 0$$

$$-8M \frac{\pi}{2} - 32X = 0 ; \quad X = - \frac{\pi}{8} M$$

De E18.4e:

$$\frac{16}{EI} M \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha + \frac{64}{EI} X \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \, d\alpha = -1; \quad \frac{32M}{EI} + \frac{64X}{EI} \frac{\pi}{2} = -1$$

$$\frac{32M}{EI} \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{8} \right\} = -1 ; \quad \frac{32M}{EI} \frac{\pi^2 - 8}{8} = 1; \quad M = \frac{EI}{4\{\pi^2 - 8\}}$$

$M = 0,13372 \, EI$ $X = -0,05251 \, EI$	comprobación: $\frac{\partial W}{\partial M} = \frac{4}{EI} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{M + 4X \cos \alpha\} d\alpha = 0;$
---	--

$$\pi M + 8X = 0$$

$$0 = 0$$

$$I_1 = \frac{1}{12} 0,4 \, 0,4^3 \frac{4^3}{10^3} \cdot 1 \quad EI_1 = 2 \cdot 10^6 \frac{1}{12} 0,4^4 = \frac{2 \cdot 4^4 \cdot 10^2}{12}$$

$$I_2 = \frac{1}{12} 0,4 \, 0,8^3 \frac{8^3}{10^3} \cdot 8 \quad EI_2 = 2 \cdot 10^6 \frac{1}{12} 0,4 \, 0,8^3 = \frac{2}{12} 4 \cdot 8^3 \cdot 10^2 =$$

$$= \frac{8^4}{12} 10^2$$

$$R_{BA} = R_{DC} = R_{EF} \times 0,8$$

$$R_{BD} = R_{DB} \times 4,631$$

$$R_{DE} = R_{ED} \times 4$$

Estado I: $\hat{M}_{DE} = -\hat{M}_{ED} = \frac{3 \cdot 8^2}{12} = 16 \, \text{m.t}$

$$\begin{aligned}\text{Estado II: } \hat{M}_{DC} &= \hat{M}_{CD} = \hat{M}_{EF} = \hat{M}_{FE} = \frac{6EI}{L^2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 4^4 \cdot 10^2}{12 \cdot 25} = \\ &= 4^5 = 1024 \text{ m.t}\end{aligned}$$

$$\hat{M}_{BD} = -\hat{M}_{DB} = 0,13372 \frac{8^4}{12} 10^2 = 4564,34 \text{ m.t}$$

$$\text{Estado III: } \hat{M}_{BA} = \hat{M}_{AB} = -1024 \text{ m.t}$$

$$\hat{M}_{BD} = -\hat{M}_{DB} = 4564,34 \text{ m.t}$$

Tabla E18.4a.

	I							II							III						
NUDO	B		D			E		B		D			E		B		D			E	
BARRA	BA	BD	BD	DC	DE	ED	EF	BA	BD	DB	DC	DE	ED	EF	BA	BD	DB	DC	DE	ED	EF
Y		-0,45	-0,45		0,5	0,5			-0,45	-0,45		0,5	0,5			-0,45	-0,45		0,5	0,5	
K	0,15	0,85	0,49	0,08	0,43	0,5	0,5	0,15	0,85	0,49	0,08	0,43	0,5	0,5	0,15	0,85	0,49	0,08	0,43	0,5	0,5
M	0	0	0	0	16	-16	0	0	4564	-4564	1024	0	0	1024	-1024	4564	-4564	0	0	0	0
R ₁	0	0	-7,84	-1,28	-6,88	8	8	-685	-3879	1735	283	1522	-512	-512	-531	-3009	2236	365	1963	0	0
T ₁	0	3,53	0	0	4	-3,44	0	0	-781	1746	0	-256	761	0	0	-1006	-1354	0	0	982	0
R ₂	-0,53	-3	-1,96	-0,32	-1,72	1,72	1,72	117	664	-730	-119	-641	-381	-380	151	855	664	108	582	-491	-491
Σ	-0,53	0,53	-9,8	-1,6	11,4	-9,72	9,72	-568	568	-1813	1188	625	-132	132	-1404	1404	-3018	473	2545	491	-491

$$M_{AB} = (-0,53-0)0,5 + 0 = -0,27$$

$$M_{CD} = (-1,6-0)0,5 + 0 = -0,8$$

$$M_{FE} = (9,72-0)0,5 + 0 = 4,86$$

$$M_{AB} = (-568-0)0,5 + 0 = -284$$

$$M_{CD} = (1188-1024)0,5 + 1024 = 1106$$

$$M_{FE} = (132-1024)0,5 + 1024 = 578$$

$$M_{AB} = (-1404+1024)0,5 - 1-24 = -1214$$

$$M_{CD} = (473-0)0,5 + 0 = 236,5$$

$$M_{FE} = (-491-0)0,5 + 0 = -245,5$$

Para el cálculo de los parámetros se calculan los cortantes (figura E18.4g).

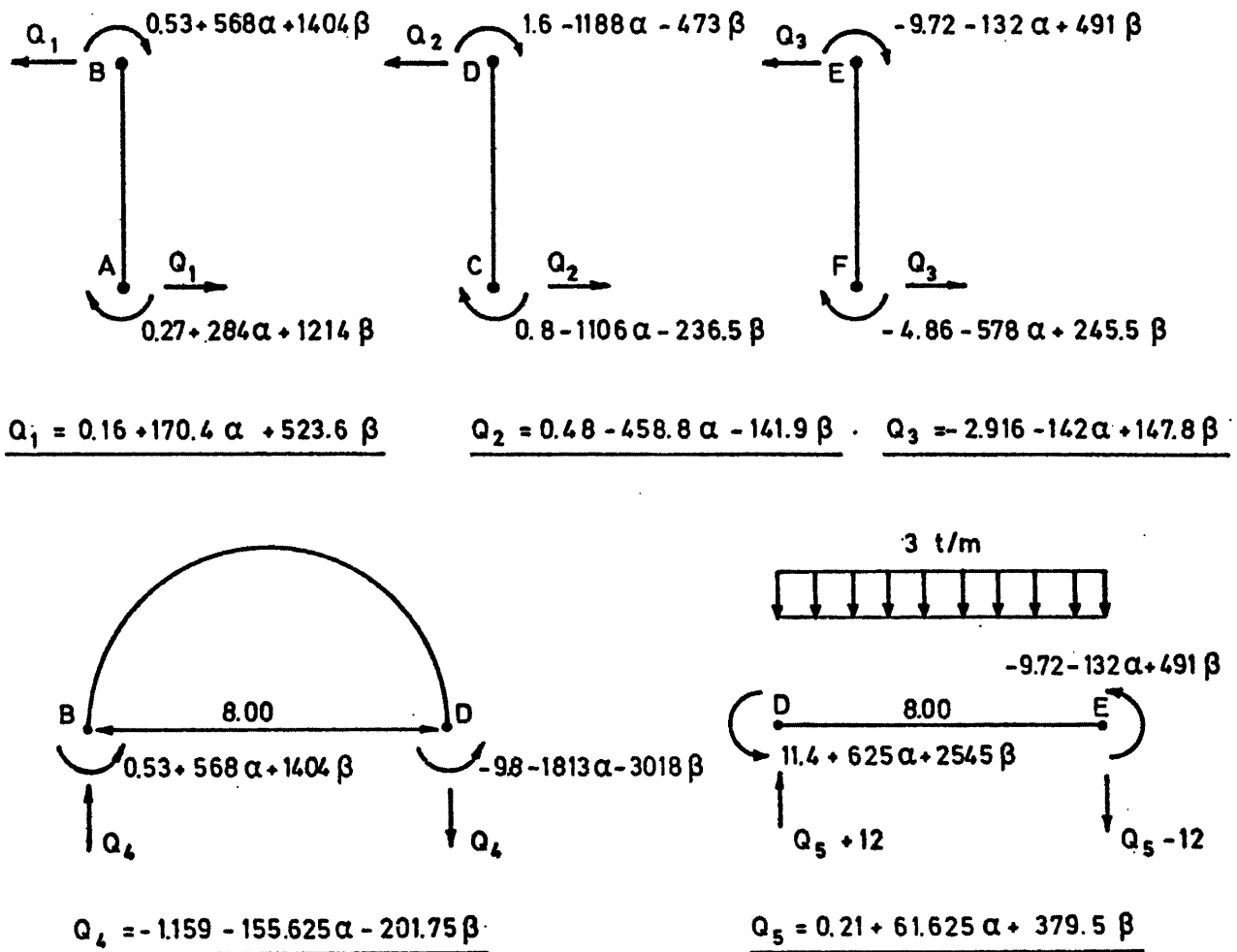


Fig. E 18. 4g

En el equilibrio del nudo B se hallan N_1 y N_2 (figura E18.4h).

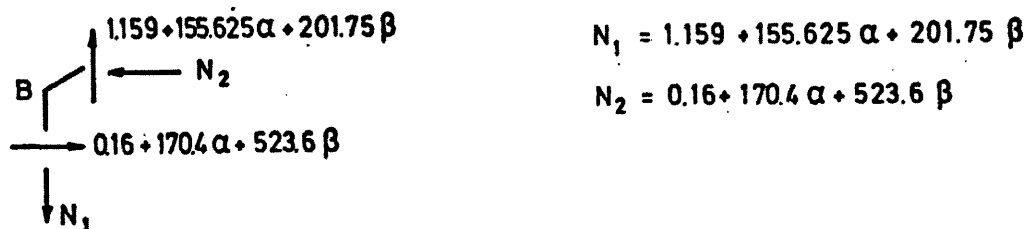


Fig. E 18. 4 h

En el equilibrio del nudo E se hallan N_3 y N_4 (figura E18.4i).

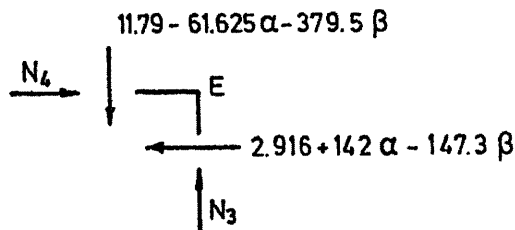


Fig. E18.4i

$$N_3 = 11.79 - 61.625\alpha - 379.5\beta$$

$$N_4 = 2.916 + 142\alpha - 147.3\beta$$

Del equilibrio del nudo D se saca una ecuación (figura E18.4j):

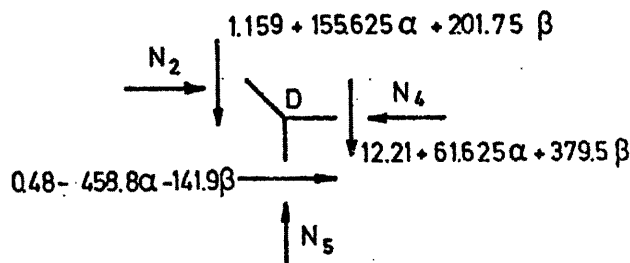


Fig. E18.4j

$$N_5 = 13.37 + 217.25\alpha + 581.25\beta$$

$$\Sigma F = 0 \equiv -2.276 - 430.4\alpha + 529\beta = 0$$

Ecuación que conocida con la obtenida al plantear el equilibrio de cortantes, como se indica a continuación:

Equilibrio de cortantes de la figura E18.4k:

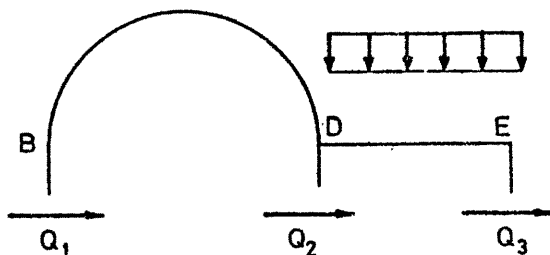


Fig. E18.4k

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$-2.276 - 430.4\alpha + 529\beta = 0$$

La segunda ecuación que permite determinar α y β se obtiene como:

$$\frac{\partial W}{\partial X_1} = 0 ; \quad M + \pi X_1 - 4Y = 0 ;$$

$$x_1 = \frac{4Y-M}{\pi} = \frac{\frac{M}{2} + \frac{M'}{2} - M}{\pi} = \frac{M'-M}{2\pi}$$

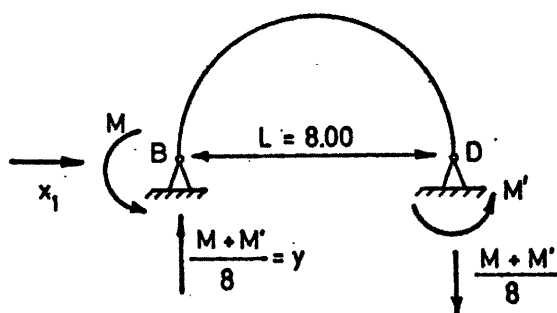


Fig. E18.41

$$M = 0,53 + 568\alpha + 1404\beta \quad X_1 = -1,644 - 378,948\alpha - 703,783\beta$$

$$W = \frac{2}{EI} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{4X_2 \cos \alpha\}^2 d\alpha$$

$$\frac{\partial W}{\partial X_2} = \frac{4}{EI} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{4X_2 \cos \alpha\} 4 \cos \alpha \, d\alpha = -1$$

$$\frac{64X_2}{EI} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \, d\alpha = -1$$

$$\frac{64X_2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = -1$$

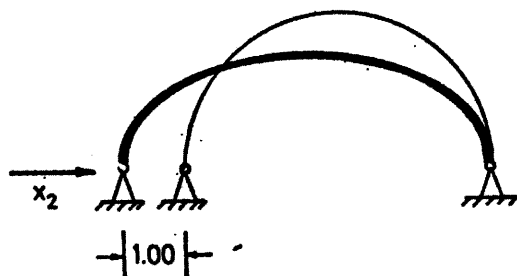


Fig. E 18.4m

$$x_2 = \frac{-EI}{32\pi} \frac{-8^4 \cdot 10^2}{32 \cdot 12 \cdot \pi} = -339,53$$

Se ha de cumprir:

$$N_2 = X_1 + X_2 \alpha + X_2 \beta$$

$$0,16 + 170,4\alpha + 523,6\beta = -1,644 - 378,948\alpha - 703,783\beta - \\ - 339,53\alpha - 339,53\beta$$

$$-1,804 - 888,878\alpha - 1566,913\beta = 0 \quad \{E184h\}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones
E18.4g y E18.4h:

$$\begin{aligned} -2,276 - 430,4\alpha + 529\beta &= 0 \\ 1,804 + 888,878\alpha + 1566,913\beta &= 0 \end{aligned} \quad \alpha = -0,00395 \quad \beta = 0,00109$$

GIRO DEL NUDO D

$$\begin{aligned} R_{DC} &= \frac{4EI}{L} = \frac{4}{5} \frac{2 \cdot 4^4 \cdot 10^2}{12} = \frac{2 \cdot 4^4}{15} 10^2 = \frac{512}{15} 100 = \\ &= \theta_D = \frac{(-1,28 - 0,32) - 0,00395(283 - 110) + 0,00109(365 + 108)}{51200} 15 = \\ &= -5,1 \cdot 10^{-4} \text{ radianes} \end{aligned}$$

$$\theta_D = -5,1 \cdot 10^{-4} \text{ radianes}$$

AXILES:

$$\text{Barra A-B: } N_1 = + 0,765 \text{ t.}$$

$$\text{Barra D-C: } N_5 = -13,145 \text{ t.}$$

$$\text{Barra D-E: } N_4 = - 2,195 \text{ t.}$$

$$\text{Barra E-F: } N_3 = -11,62 \text{ t.}$$

Ejercicio E19.1.

En la estructura de la figura E19.1a y por el método de los "MOMENTOS 100", hallar la línea de influencia del momento flector en la sección A, cuando una carga vertical descendente recorre el dintel superior. Se darán los valores de la línea de influencia en puntos situados a cuartos de luz de cada vano del dintel.

Características de las barras:

1-3. 3-4 y 4-6: Sección rectangular de 10 m de ancho y 1 m de canto.

2-3 y 4-5 : 4 barras cilíndricas de 1 m de diámetro.

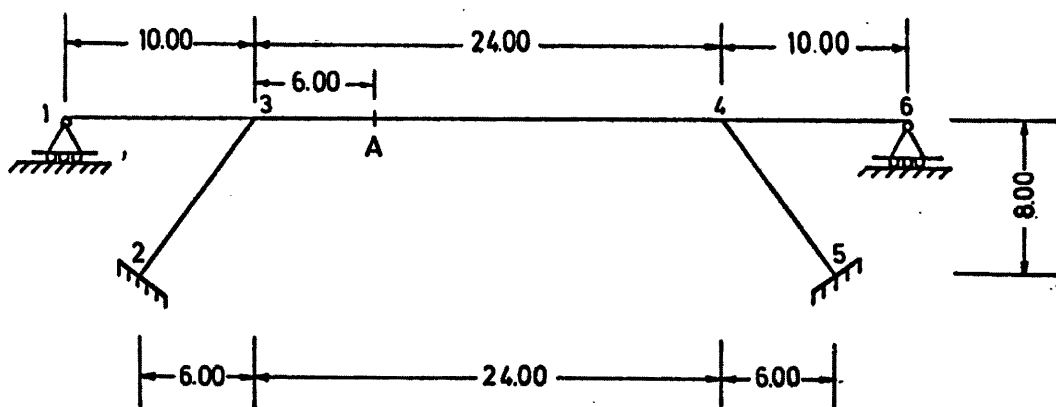


Fig. E 19. 1a

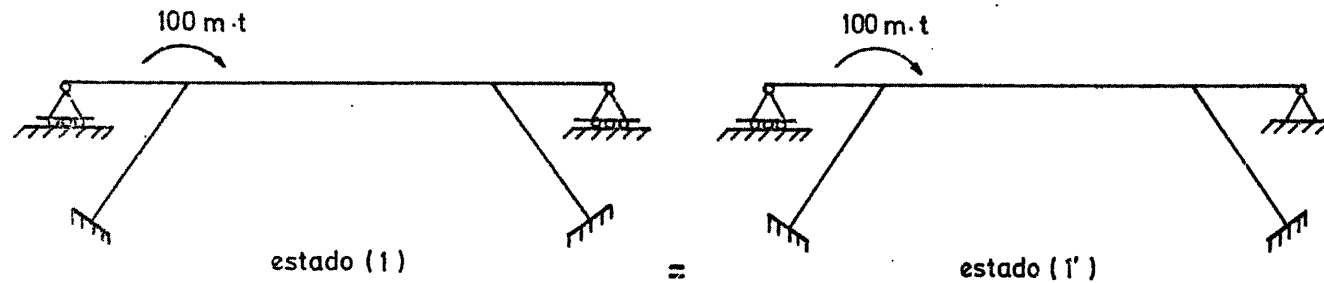


Fig. E 19.1 b

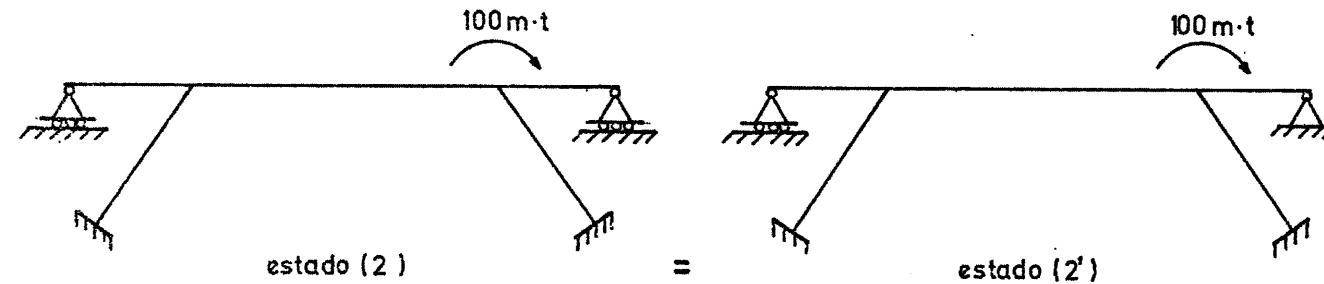
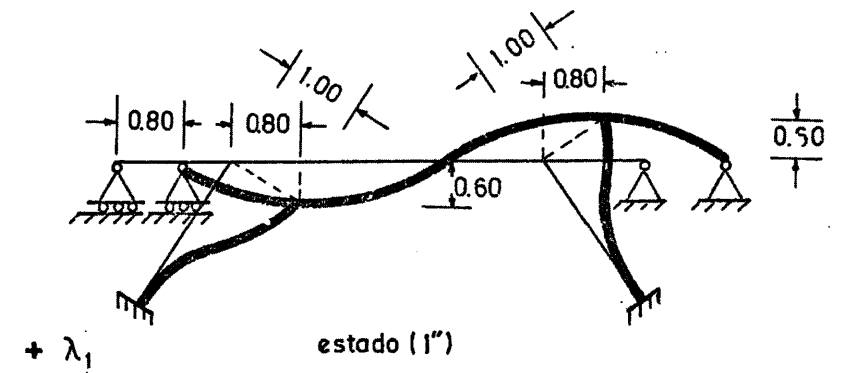


Fig. E 19.1 c

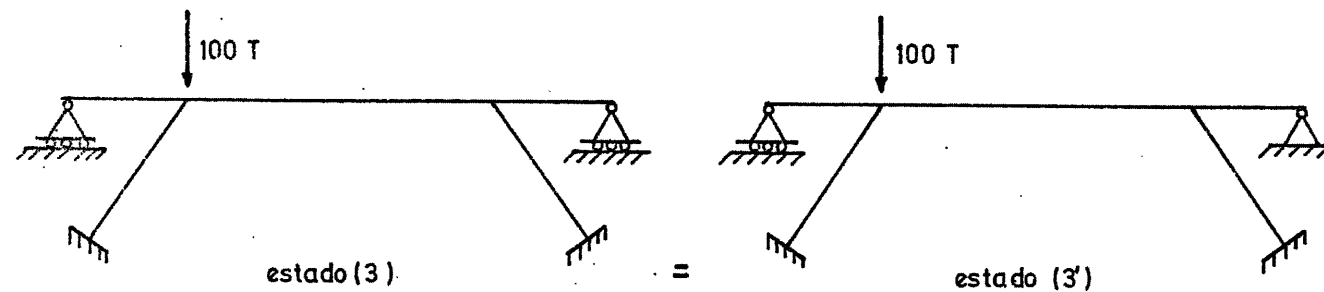
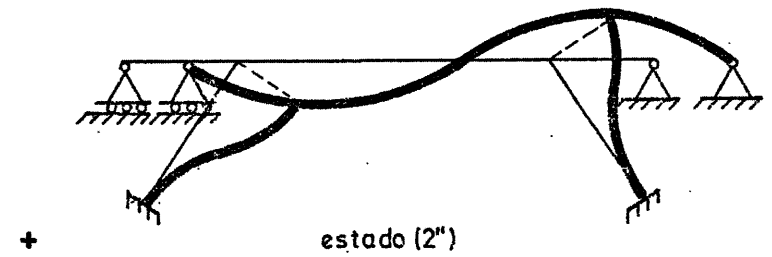


Fig. E 19.1 d

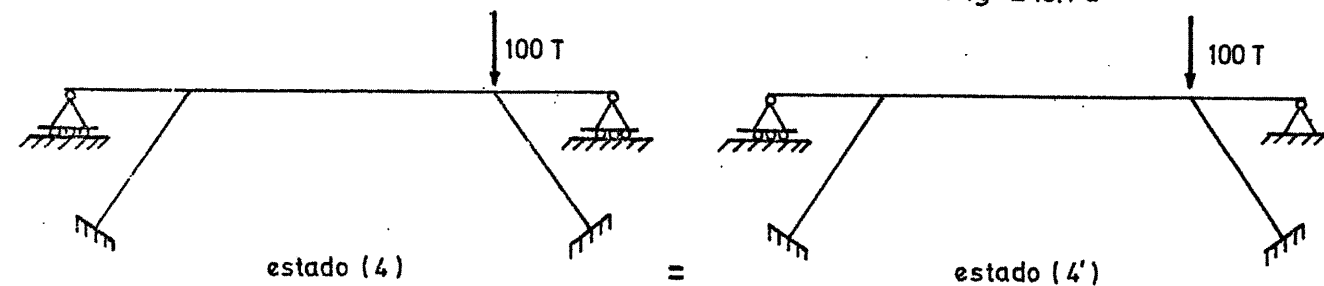
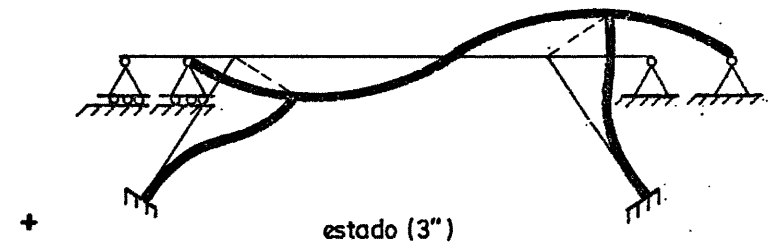
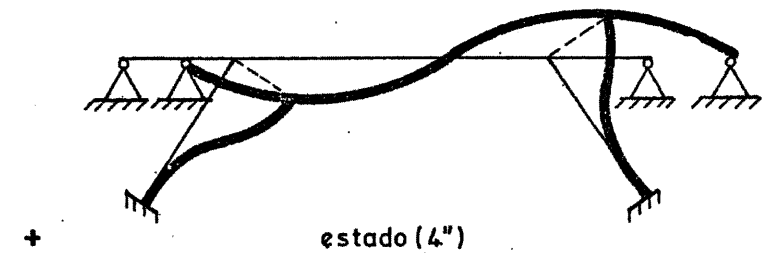


Fig. E 19.1 e



Los estados básicos que se van a tener que considerar son los de las figuras E19.1b, E19.1c, E19.1d y E19.1e.

Los estados (1') y (2') se calculan por medio de los estados simétricos (S) (S') y antimétricos (A) de la figura E19.1f.

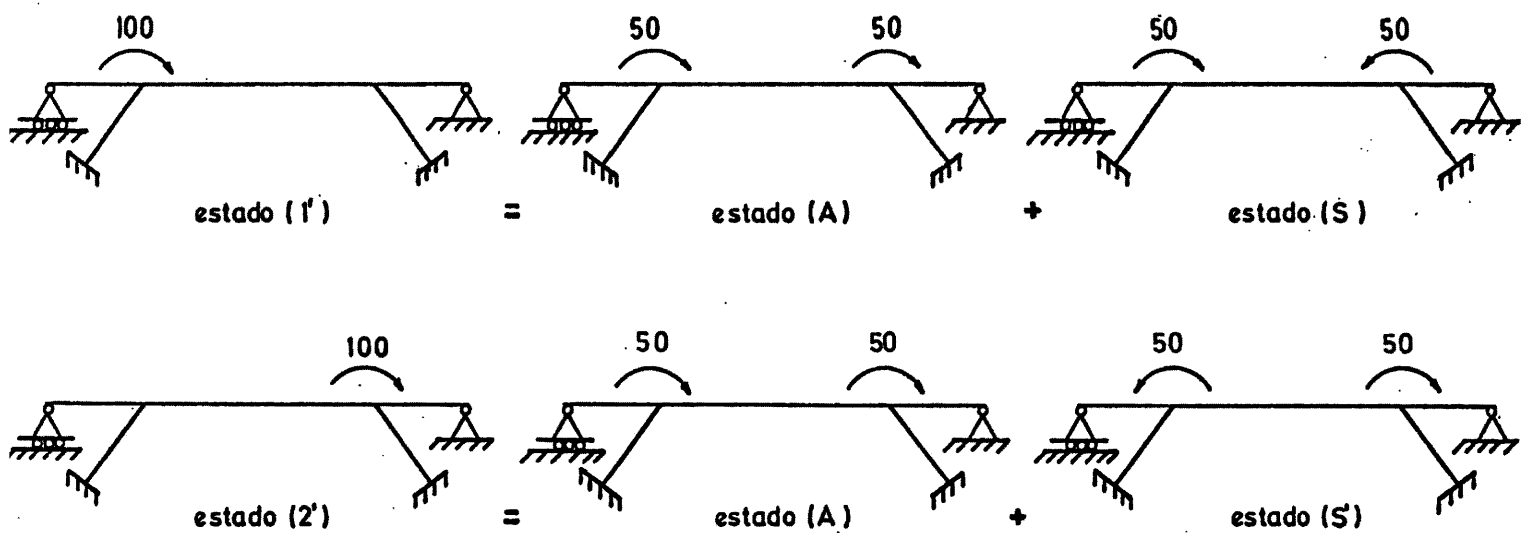


Fig. E 19.1f

Las rigideces son:

$$R_{31} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\frac{10 \cdot 1^3}{12}}{10} = 0,0623$$

$$R_{A_{34}} = 1,5 \cdot \frac{\frac{10 \cdot 1^3}{12}}{24} = 0,05208$$

$$R_{S_{34}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{10 \cdot 1^3}{12}}{24} = 0,01736$$

$$R_{32} = \frac{4 \cdot \frac{\pi \cdot 1}{64}}{10} = 0,019635$$

En las tablas E19.1a y E19.1b se efectúan los cálculos de Cross de los estados (A) y (S).

Tabla E19.1a Estado (A)

Nudo	3		
Barra	3-1	3-2	3-4
γ		0,5	
R	0,0625	0,019635	0,05208
K	0,47	0,14	0,39
Momento exterior		50	
\hat{M}			
M^I	-23,5	-7,0	-19,5
Σ	-23,5	-7,0	-19,5

Tabla E19.1b Estado (S)

Nudo	3		
Barra	3-1	3-2	3-4
γ		0,5	
R	0,0625	0,019635	0,01736
K	0,63	0,20	0,17
Momento Exterior		50	
\hat{M}			
M^I	-31,5	-10,0	-8,5
Σ	-31,5	-10,0	-8,5

El estado (S') es precisamente simétrico del estado (S).

Los momentos en extremos de barra para los estados (1') y (2') se esquematizan gráficamente en las figuras E19.1g y E19.1h.

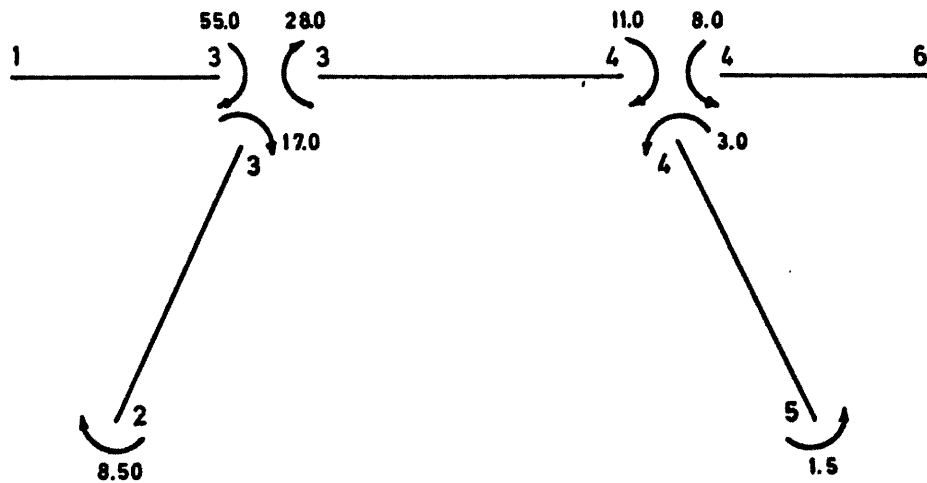


Fig. E19.1g.- Momentos en extremos de barra del estado (1')

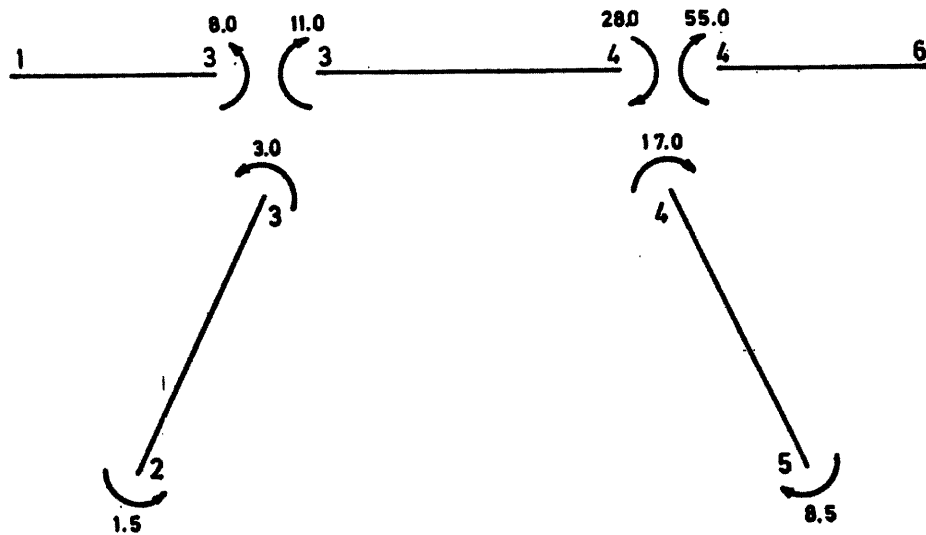


Fig. E19.1h.- Momentos en extremos de barra en el estado (2')

El estado traslacional (1"), (2"), (3") y (4") se resuelve en la tabla E19.1c y en la figura E19.1i se dan los momentos en extremos de barra.

$$\hat{M}_{31} = \hat{M}_{46} = \frac{3 E \cdot \frac{5}{6} 0,6\lambda}{100} = 1,5 \cdot 10^{-2} \lambda E$$

$$\hat{M}_{34} = \hat{M}_{43} = - \frac{6 E \cdot \frac{5}{6} 1,2\lambda}{24^2} = -1,04 \cdot 10^{-2} \lambda E$$

$$\hat{M}_{32} = \hat{M}_{23} = \hat{M}_{45} = \hat{M}_{54} = \frac{6 E \cdot 0,19635\lambda}{100} = 1,18 \cdot 10^{-2} \lambda E$$

Tabla E19.1c Estado traslacional

Nudo	3		
Barra	3-1	3-2	3-4
γ		0,5	
R	0,0625	0,019635	0,05208
K	0,47	0,14	0,39
\hat{M}	150	118	-104
M^I	-77	-23	-64
Σ	73	95	-168

$$M_{2-3} = 118 + \frac{1}{2}(95 - 118) = 106,5$$

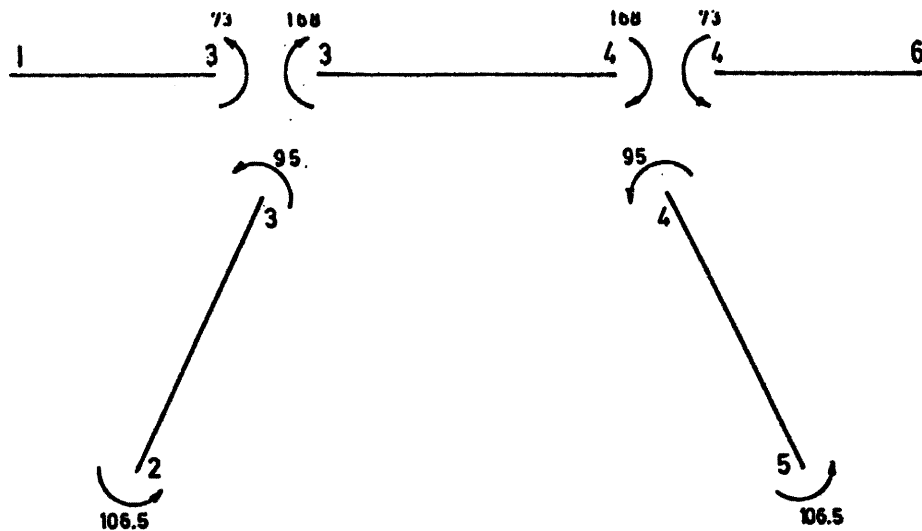


Fig. E19.1i.- Momentos en extremos de barra del estado traslacional

Teniendo en cuenta la figura E19.1j, el equilibrio se puede obligar haciendo cero el momento respecto al punto 0.

$$-M_{32} = 17,0 - 95 \lambda_1$$

$$-M_{45} = -3,0 - 95 \lambda_1$$

$$Q_{32} = \frac{17,0 + 8,5}{10} - \frac{95 + 106,5}{10} \lambda_1 = 2,55 - 20,15 \lambda_1$$

$$Q_{45} = -\frac{3,0 + 1,5}{10} - \frac{95 + 106,5}{10} \lambda_1 = -0,45 - 20,15 \lambda_1$$

$$P_{y1} = \frac{550}{10} - \frac{73}{10} \lambda_1 = 55 - 7,3 \lambda_1$$

$$P_{y6} = -\frac{8,0}{10} - \frac{73}{10} \lambda_1 = -0,8 - 7,3 \lambda_1$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_0 &= -100 + 17,0 - 95 \lambda_1 - 3,0 - 95 \lambda_1 + (2,55 - 20,15 \lambda_1 - \\ &- 0,45 - 20,15 \lambda_1) 20 + (5,5 - 7,3 \lambda_1 - 0,8 - 7,3 \lambda_1) 22 = 0 \\ 59,4 - 1317,2 \lambda_1 &= 0 ; \quad \lambda_1 = 0,0451 \end{aligned}$$

$$E_1 = E_{1'} + 0,0451 E_{1''}$$

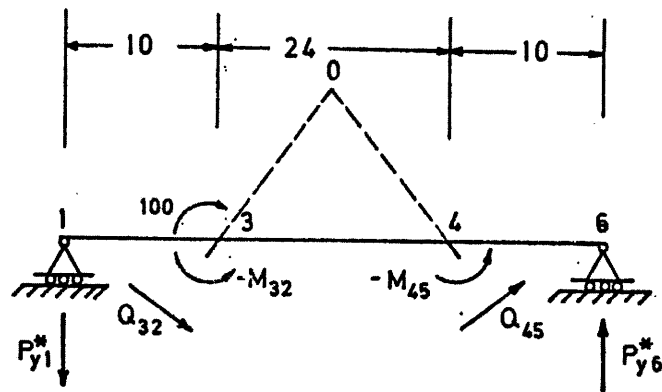


Fig. E 19. 1j

La figura E19.1k plantea el equilibrio del estado
(3).

$$-M_{32} = -95 \lambda_3 ; \quad -M_{45} = -95 \lambda_3$$

$$Q_{23} = -20,15 \lambda_3 ; \quad Q_{45} = -10,15 \lambda_3$$

$$P_{y1} = -7,3 \lambda_3 ; \quad P_{y6} = -7,3 \lambda_3$$

$$\Sigma M_0 = 100 \cdot 12 - 1317,2 \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_3 = 0,911$$

$$E_3 = 0,911 E_{3''}$$

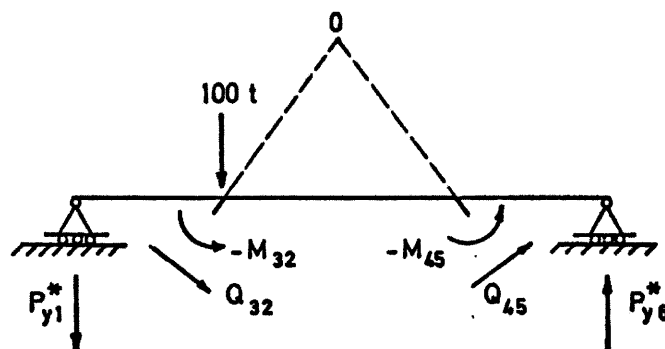
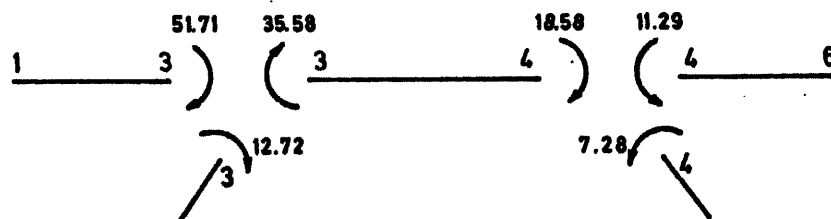


Fig. E 19.1k

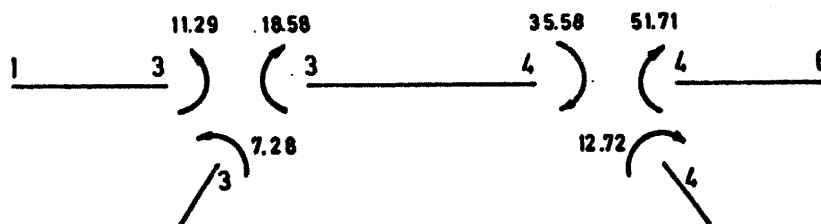
Los momentos flectores en extremos de barra se indican en las figuras E19.1l, E19.1m, E19.1n y E19.1p para los estados (1), (2), (3) y (4).



carga fuera de 3-4 $M_A = -M_{34} - 6Q_{34} = 22,04$

carga en 3-4 $M_A = -(100 + M_{34}) - 6Q_{34} = -52,96$

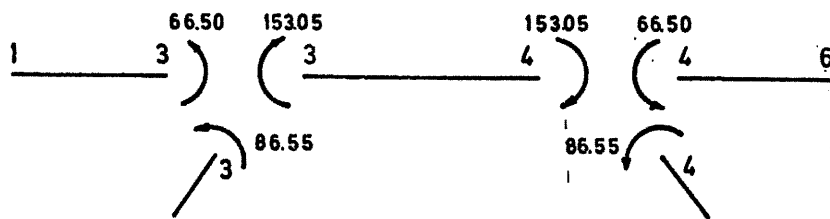
Fig. E19. 1l.- Estado (1)



carga fuera de 3-4 $M_A = 5,04$

carga en 3-4 $M_A = 30,04$

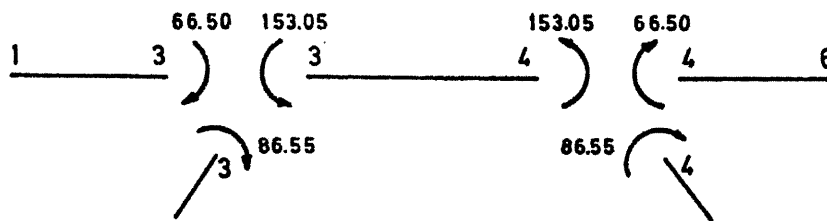
Fig. E 19.1m. - Estado (2)



$$M_A = 76.5$$

Fig. E 19.1n.- Estado (3)

Estado (3)



$$M_A = -76.5$$

Fig. E 19.1p.- Estado (4)

Estado (4)

En la figura E19.1q se dibuja la línea de influencia pedida.

En la tabla E19.1d se halla la línea de influencia buscada.

Tabla E19.1d.

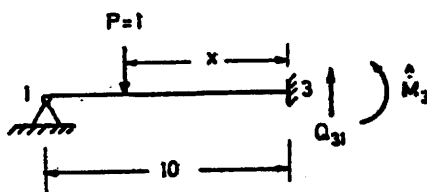
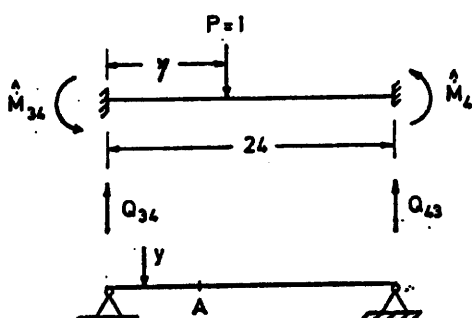
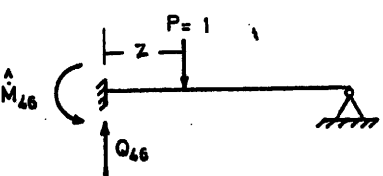
FUERZA 1-3	FUERZA 3-4	FUERZA 4-6
 $\hat{M}_{31} = -\frac{x}{2} \left\{ 2 - \frac{x}{10} \left(3 - \frac{x}{10} \right) \right\}$ $Q_{31} = \left\{ 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 10^2} \left(3 - \frac{x}{10} \right) \right\}$ $M_A \Big _1^3 = \frac{22,04}{100} \left\{ -\frac{x}{2} \left(2 - \frac{x}{10} \right) \left(3 - \frac{x}{10} \right) \right\} +$ $+ \frac{76,5}{100} \left\{ 1 - \frac{x^2}{200} \left(3 - \frac{x}{10} \right) \right\}$	 $\hat{M}_{34} = y \left(1 - \frac{y}{24} \right)^2$ $\hat{M}_{43} = -\frac{y^2}{24} \left(1 - \frac{y}{24} \right)$ $Q_{34} = \left\{ 1 - \frac{y^2}{24^2} \left(3 - 2 \frac{y}{24} \right) \right\}$ $Q_{43} = \frac{y^2}{24^2} \left(3 - \frac{y}{24} \right)$ $\hat{M}_A \Big _0^6 = \frac{y}{24} \cdot 18 = 0,75 y$ $\hat{M}_A \Big _6^{14} = \frac{24-y}{24} \cdot 6 = 6 - 0,25 y$ <p>Para y 6,00</p> $M_A \Big _3^4 = 0,75 y - \frac{52,96}{100} y \left(1 - \frac{y}{24} \right)^2 + \frac{30,04}{100} \left\{ \frac{y^2}{24} \left(1 - \frac{y}{24} \right) \right\} +$ $+ \frac{76,5}{100} \left\{ 1 - \frac{y^2}{24^2} \left(3 - 2 \frac{y}{24} \right) \right\} - \frac{76,5}{100} \left\{ \frac{y^2}{24^2} \left(3 - \frac{2y}{24} \right) \right\}$	 $\hat{M}_{46} = \frac{z}{2} \left\{ 2 - \frac{z}{10} \left(3 - \frac{z}{10} \right) \right\}$ $Q_{46} = \left\{ 1 - \frac{z^2}{200} \left(3 - \frac{z}{10} \right) \right\}$ $M_A = \frac{5,04}{100} \frac{z}{2} \left\{ 2 - \frac{z}{10} \left(3 - \frac{z}{10} \right) \right\} -$ $- \frac{76,5}{100} \left\{ 1 - \frac{z^2}{100} \left(3 - \frac{z}{10} \right) \right\}$

Tabla E19.1d.

Para y 6,00

$$M_A^4 = 6 - 0,25y - \frac{52,96}{100} y(1-\frac{y}{24})^2 +$$

$$+ \frac{30,04}{100} \{-\frac{y^2}{24}(1-\frac{y}{24})\} +$$

$$+ \frac{76,5}{100} \{1 - \frac{y^2}{24^2}(3-\frac{2y}{24})\} - \frac{76,5}{100} \{-\frac{y^2}{24^2}(3-\frac{2y}{24})\}$$

$$M_A = 0,2204 A + 0,7650 B$$

$$y \ 6,00 \ M_A^4 = 0,75y - 0,5296 A_1 + 0,300 B_1 +$$

$$+ 1,5500 C_1 + 0,7650$$

$$y \ 6,00 \ M_A^4 = 6 - 0,25y - 0,5296 A_1 + 0,3004 B_1 -$$

$$- 1,53 C_1 + 0,765$$

$$M_A = 0,0504 A_2 - 0,7650 B_2$$

x	0,2204 A	0,7650 B	M _A
0,0	0,0000	0,7650	0,77
2,5	-0,3615	0,6993	0,34
5,0	-0,4133	0,5259	0,11
7,5	-0,2583	0,2809	0,02
10,0	0,0000	0,0000	0,00

y	-0,5296 A ₁	0,3004 B ₁	-1,5300 C ₁	M _A
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,77
6,0	-1,7874	-0,3380	-0,2391	2,91
12,0	-1,5888	-0,9012	-0,7650	0,52
18,0	-0,5958	-1,0138	-1,2909	-0,62
24,0	0,0000	0,0000	-1,5300	-0,77

z	0,0504 A ₂	-0,7650 B ₂	M _A
0,0	0,0000	-0,7650	-0,77
2,5	0,0827	-0,6993	-0,62
5,0	0,0945	-0,5259	-0,44
7,5	0,0591	-0,2809	-0,22
10,0	0,0000	0,0000	0,00

LINEA DE INFLUENCIA

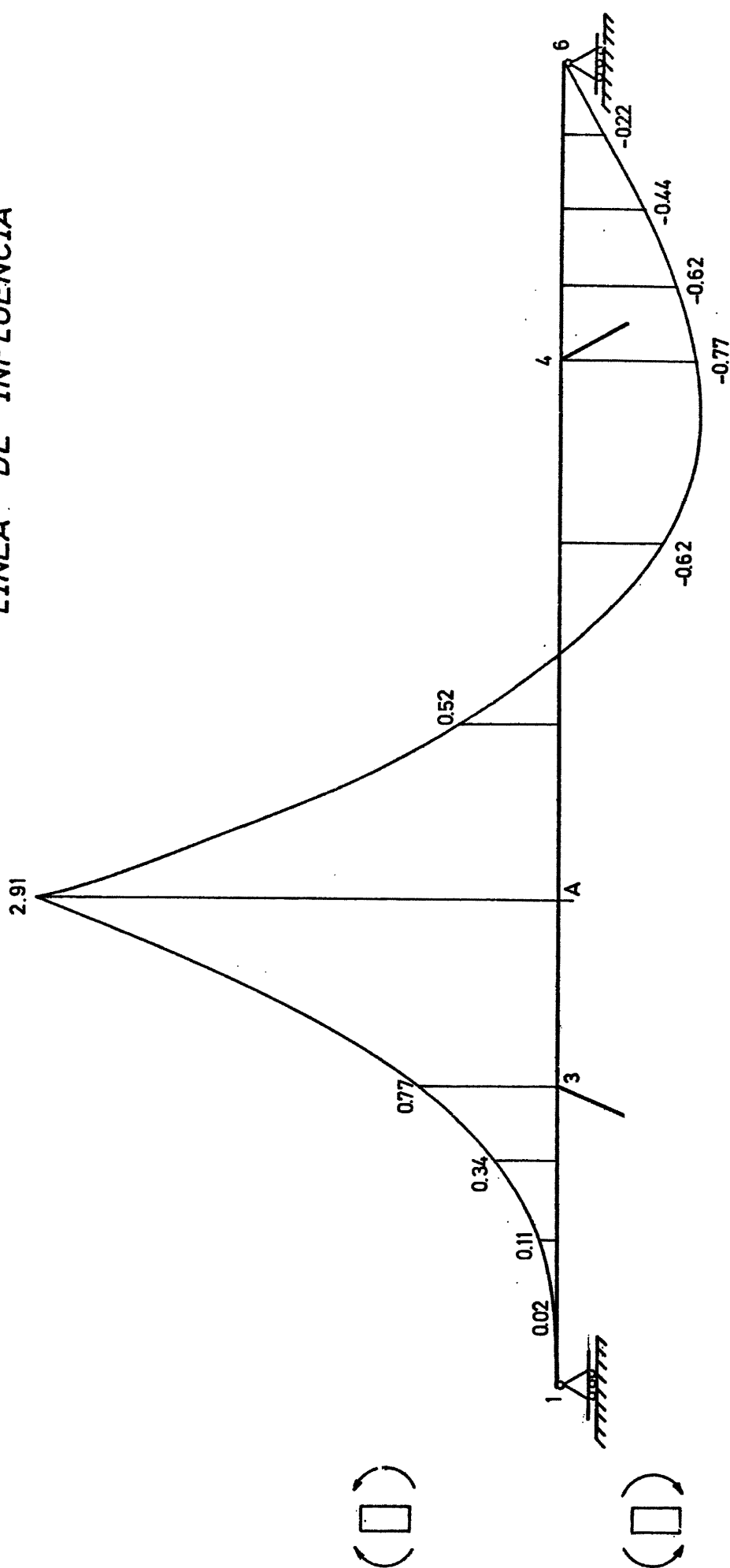


Fig.E19.1 q.- Línea de influencia del momento flector en 4

Ejercicio E19.2.

En la estructura de la figura E19.2a y por el método de "RECIPROCIDAD", hallar la línea de influencia del momento flector en la sección A, cuando una carga vertical descendente recorre el dintel superior. Se darán los valores de la línea de influencia en puntos situados a cuartos de luz de cada vano del dintel.

Características de la barra:

1-3, 3-4 y 4-6: Sección rectangular de 10 m de ancho y 1 m de canto.

2-3 y 4-5 : 4 barras cilíndricas de 1 m de diámetro.

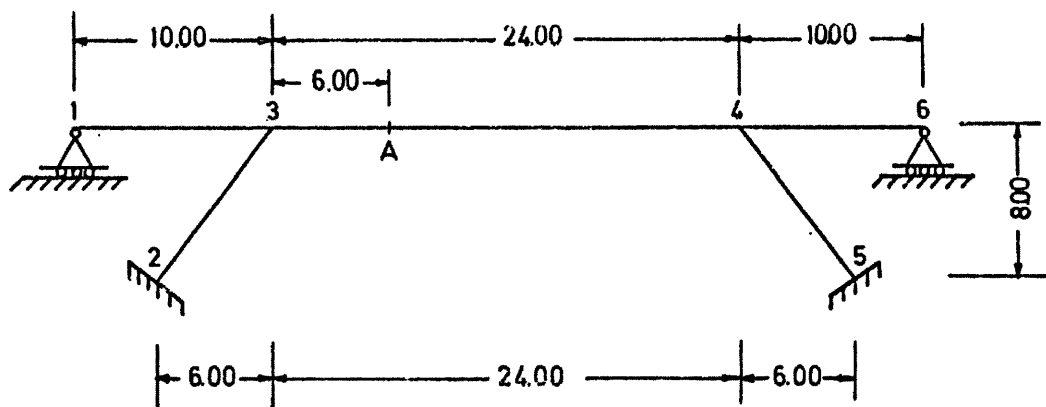
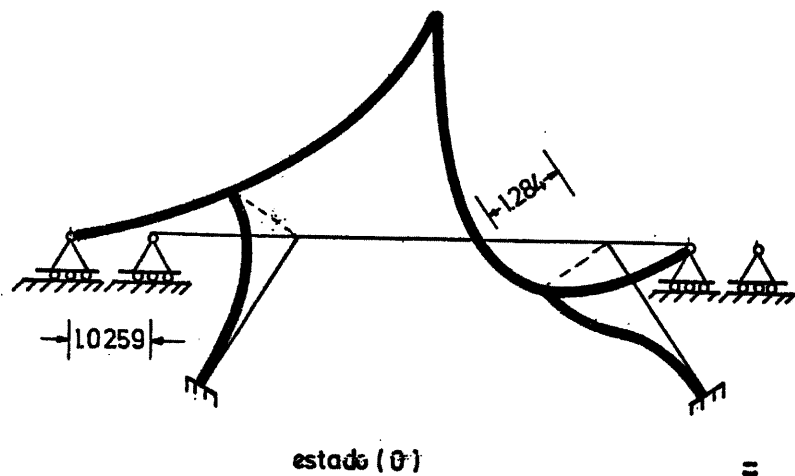
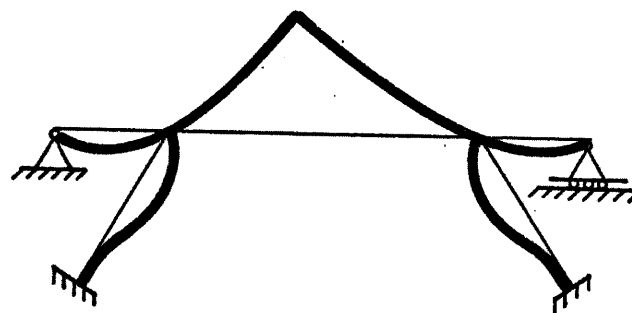


Fig. E19.2 a



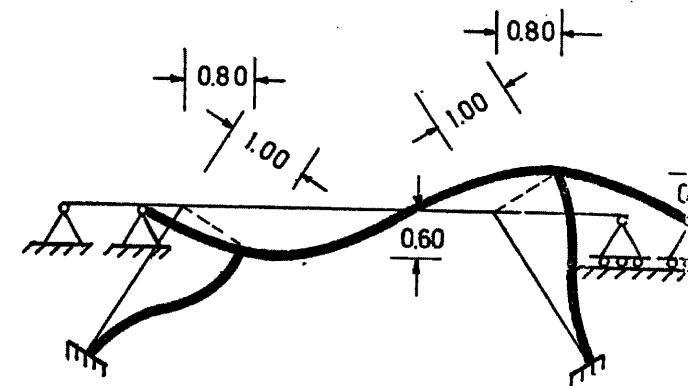
estado (0)

=



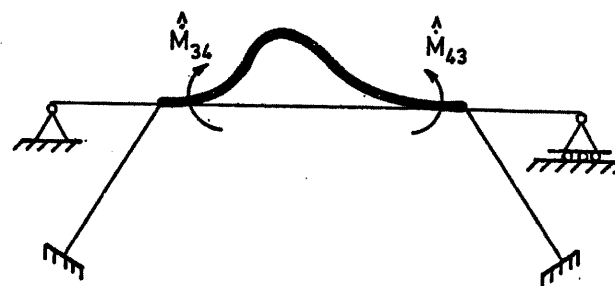
estado (1)

+ λ



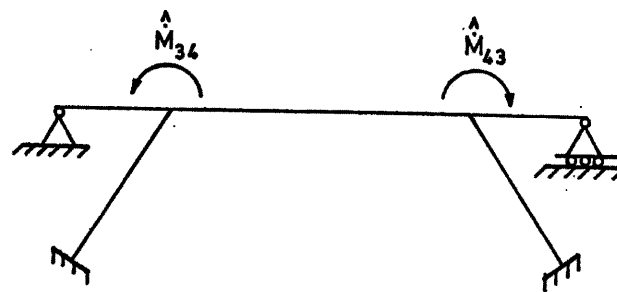
estado (2)

=

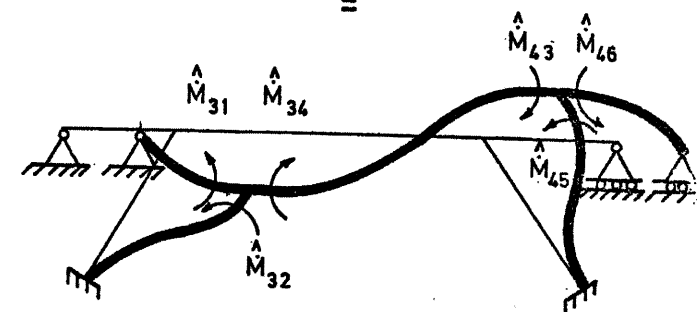


estado (1')

+

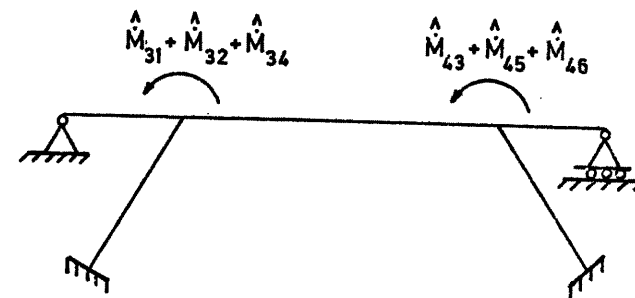


estado (1'')



estado (2')

+



estado (2'')

Fig. E19.2 b

Fig. E19.2 c

Fig. E19.2 d

Se considera el estado (0) de la figura E19.2b.

Los estados (1) y (2) se descomponen a su vez en los estados (1') y (1'') y en (2') y (2''), de las figuras E19.2c y E19.2d.

Las rigideces de las barras son:

$$I_{13} = I_{34} = I_{46} = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} 10 \cdot 1^3 = \frac{5}{6} m^4$$

$$R_{3-1} = R_{4-6} = \frac{3EI}{L} = \frac{3 E \frac{5}{6}}{10} = 0,25 E$$

$$R_{3-4} = R_{4-3} = \frac{4EI}{24} = \frac{4 E \frac{5}{6}}{24} = 0,1389 E$$

$$I_{23} = I_{45} = 4 \frac{\pi R^4}{4} = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{\pi}{2^4}$$

$$R_{3-2} = R_{4-5} = \frac{4EI}{L} = \frac{4 E \frac{\pi}{2^4}}{10} = 0,07854 E$$

Los momentos de empotramiento en el Estado (1') son, según se desprende de la figura E19.2e:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\Delta_Y}{6} \left\{ \frac{\Delta_Y}{6} + \frac{\Delta_Y}{18} = 1 ; \quad \frac{4\Delta_Y}{18} = 1; \quad \Delta_Y = 4,50 \right. \\ \beta &= -\frac{\Delta_Y}{18} \end{aligned} \right\} \quad \underline{\alpha = 0,75} ; \quad \underline{\beta = -0,25}$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_{34} &= R_3 (-\alpha) + Y_{43} \quad R_4 (-\beta) = 0,1389E (-0,75) + \frac{1}{2} 0,1389E (+0,25) = \\ &= -0,0868E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_{43} &= R_4 (-\beta) + Y_{34} \quad R_3 (-\alpha) = 0,1389E (+0,25) + \frac{1}{2} 0,1389E (-0,75) = \\ &= -0,01736E \end{aligned}$$

$$\hat{M}_{34} \frac{100}{0,01736E} = -500 \text{ m.t.}$$

$$\hat{M}_{43} \frac{100}{0,01736E} = -100 \text{ m.t.}$$

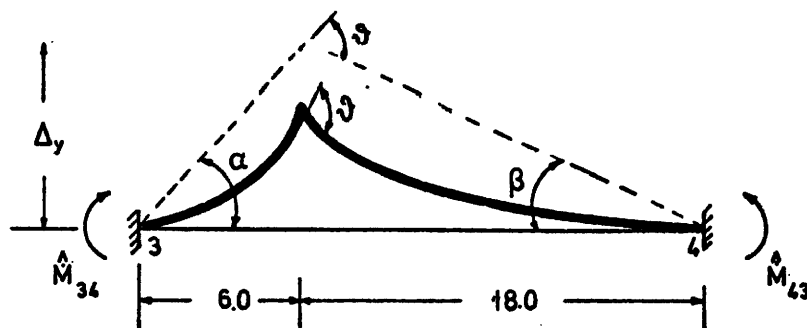


Fig. E19.2 e

El Cross del estado (1) se realiza en la tabla E19.2a. Los resultados que allí se indican hay que multiplicarlos por $\frac{0,01736E}{100}$

Tabla E19.2a.

NUDO	3			4		
BARRA	3-1	3-2	3-4	4-3	4-5	4-6
Y		0,5	0,5	0,5	0,5	
R	0,2500	0,0785	0,1389	0,1389	0,0785	0,2500
K	0,535	0,168	0,297	0,297	0,168	0,535
\hat{M}	0,00	0,00	-500,00	-100,00	0,00	0,00
M^I	267,50	84,00	148,50	29,70	116,80	53,50
M^{II}	0,00	0,00	14,85	74,25	0,00	0,00
M^{III}	-7,94	-2,50	-4,41	-22,05	-12,48	-39,72
M^{IV}	0,00	0,00	-11,03	-2,21	0,00	0,00
M^V	5,90	1,85	3,28	0,66	0,37	1,18
Σ	265,46	83,35	-348,81	-19,65	4,69	14,96

$$M_{23} = \frac{85,35}{2} = 41,68 ; \quad M_{54} = \frac{4,69}{2} = 2,35$$

El estado (2) es antimétrico (figura E19.2d).

La rigidez antimétrica es:

$$R_{A_{3-4}} = R_{34} (1 + \gamma) = 1,5 \cdot 0,1389 E = 0,2083 E$$

Los momentos de empotramiento del estado (2') son:

$$\hat{M}_{31} = \frac{3EI}{L^2} = \frac{3 E \frac{5}{6} 0,6}{10^2} = 0,015 E$$

$$\hat{M}_{32} = \hat{M}_{23} = \frac{6EI \cdot 1}{L^2} = \frac{6E}{10^2} \cdot \frac{\pi}{16} = 0,01178 E$$

$$\hat{M}_{34} = - \frac{6EI \cdot 2 \cdot \Delta}{L^2} = \frac{6E}{24^2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 1,2 = -0,01042 E$$

El Cross del estado (2) se efectúa en la tabla E19.2b, donde los valores hay que multiplicarlos por $\frac{E}{1000}$

Tabla E19.2b.

NUDO	3		
BARRA	3-1	3-2	3-4
γ		0,5	
R	0,2500	0,0785	0,2083
K	0,4657	0,1463	0,3880
\hat{M}	15,00	11,78	-10,42
M^I	-7,62	-2,39	-6,35
Σ	7,38	9,39	-16,77

Para calcular el valor de λ se plantea el equilibrio tomando momentos respecto al punto 0 de la figura E19.2f.

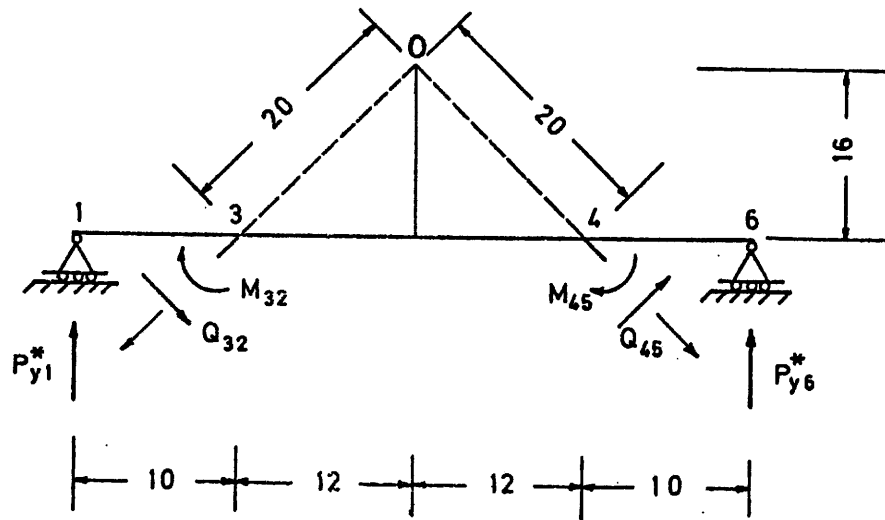


Fig. E19.2f

$$\Sigma M_0 = 22 P_{y6}^* + 20 Q_{45} + 20 Q_{32} - 22 P_{y1}^* - M_{45} - M_{32} = 0$$

$$P_{y6}^* = - \frac{M_{46}}{L_{46}} = - (14,9 \frac{0,01736 E}{100} + 7,38 \frac{E}{1000} \lambda) / 10 =$$

$$= - (0,258664 + 0,738) E \cdot 10^{-3}$$

$$Q_{45} = - \frac{M_{45} + M_{54}}{L_{45}} = - (4,69 + \frac{4,69}{2}) \cdot \frac{0,01736 E}{100} +$$

$$+ (9,39 + 10,59) \frac{E}{1000} \lambda / 10 = - (2,17043 + 1,998 \lambda) E \cdot 10^{-3}$$

$$P_{y1}^* = + \frac{M_{31}}{L_{31}} = (265,46 \frac{0,01736 E}{100} + 7,38 \frac{E}{1000} \lambda) / 10 =$$

$$= (4,60839 + 0,738 \lambda) E \cdot 10^{-3}$$

$$M_{32} = 83,35 \frac{0,01736 E}{100} + 9,39 \frac{E}{1000} \lambda$$

$$M_{45} = 4,69 \frac{0,01736 E}{100} + 9,39 \frac{E}{1000} \lambda$$

$$\Sigma M_0 = (168,21 + 131,172\lambda)E \cdot 10^{-3} = 0$$

$$\lambda = -1,2824$$

Los momentos finales en extremos de barra del cordón superior se representan en la figura E19.2g y son:

$$M_{31} = 265,46 \frac{0,01736 E}{100} + 7,38 \frac{E}{1000} \cdot (-1,2824) = 0,03662 E$$

$$M_{34} = -348,81 \frac{0,01736 E}{100} - 16,77 \frac{E}{1000} \cdot (-1,2824) = -0,03905 E$$

$$M_{43} = -19,65 \frac{0,01736 E}{100} - 16,77 \frac{E}{1000} \cdot (-1,2824) = 0,019010 E$$

$$M_{46} = 14,96 \frac{0,01736 E}{100} + 7,38 \frac{E}{1000} \cdot (-1,2824) = 0,00687 E$$

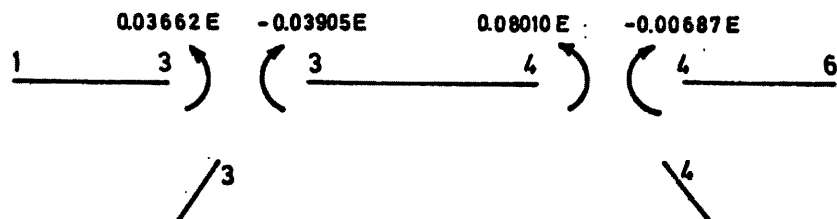
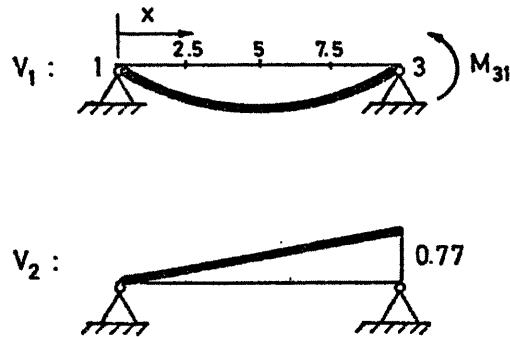


Fig. E19.2g

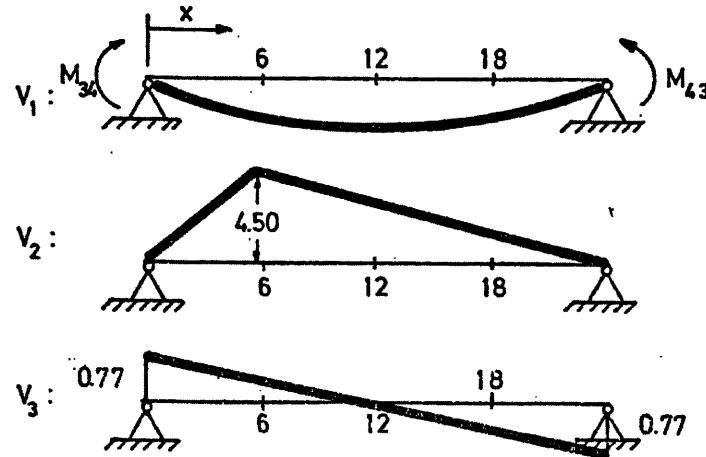
El cálculo de la deformada del cordón superior se desarrolla en la tabla E19.2c y se ha dibujado en la figura E19.2h.

Tabla E19.2c.

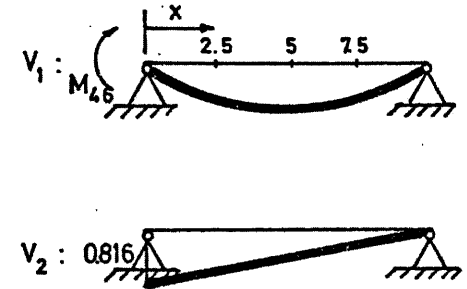
TRAMO 1-3



TRAMO 3-4



TRAMO 4-6



$$V_1^{1-3} = -0,03662 \cdot E \frac{x}{6EIL} (L^2 - x^2); V_1^{3-4} = -0,018095E (L^2 - x^2) + 0,039048E (3Lx - x^2 - 2L^2); V_1^{4-6} = 0,006867E \frac{x}{6EIL} (3Lx - x^2 - 2L^2)$$

X	V ₁	V ₂	V
2,5	-0,172	0,192	0,02
5	-0,275	0,385	0,11
7,5	-0,240	0,577	0,34
10	0,000	0,770	0,77

Tramo 1 - 3

X	V ₁	V ₂	V ₃	V
0	0,000	0,000	0,77	0,77
6	-1,965	4,50	0,385	2,92
12	-2,469	3,00	0,000	0,53
18	-1,738	1,50	-0,385	-0,623
24	0,000	0,00	-0,770	-0,77

Tramo 3 - 4

X	V ₁	V ₂	V
0	0,000	-0,770	-0,77
2,5	-0,045	-0,577	-0,622
6	-0,052	-0,385	-0,437
7,5	-0,032	-0,192	-0,224

Tramo. 4 - 6

LINEA DE INFLUENCIA

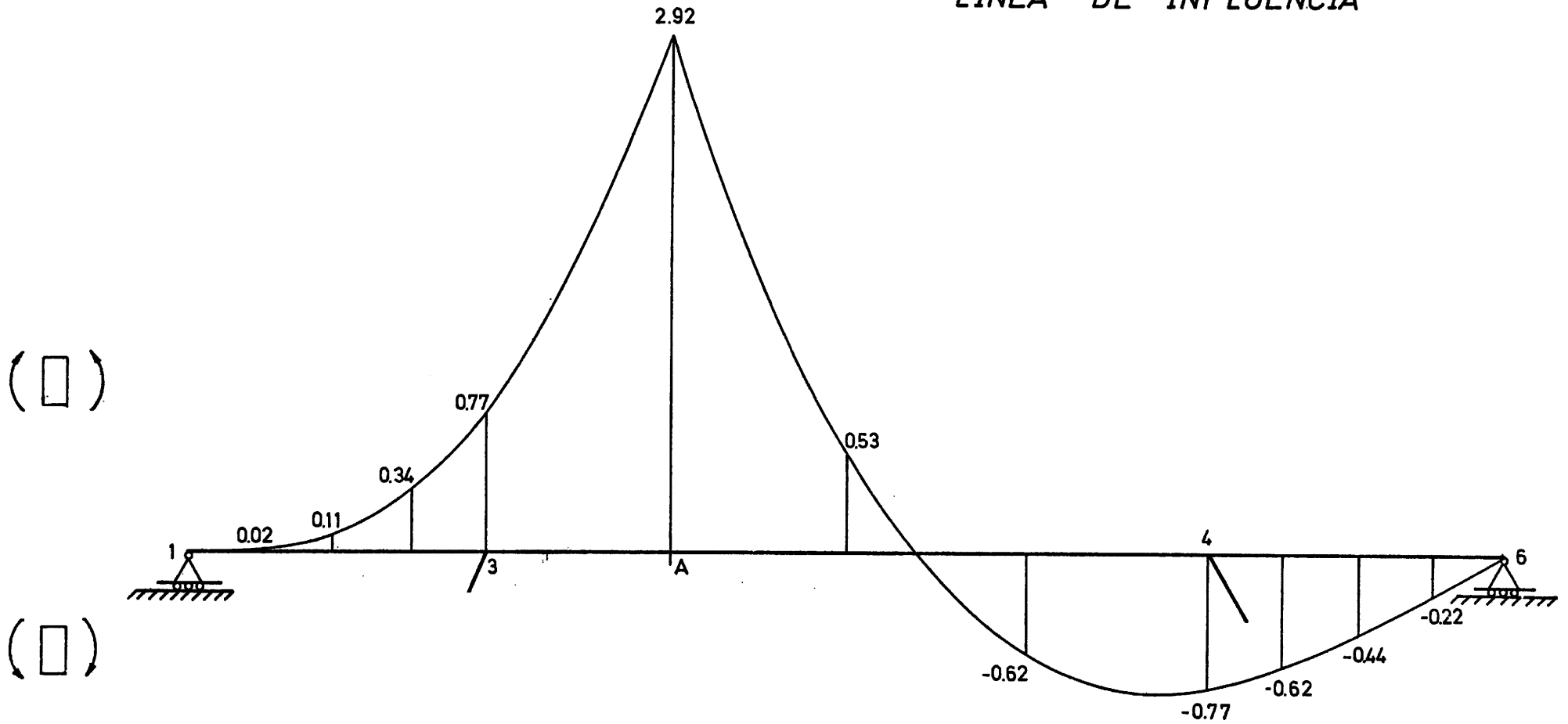


Fig. E19.2h.- Línea de influencia del momento flector en A

Ejercicio E19.3.

En la estructura reticulada de la figura E19.3a, y mediante el método de reciprocidad, se pide la LINEA DE INFLUENCIA del esfuerzo cortante en la sección A, cuando una carga vertical descendente de valor unidad recorre el dintel C-C'. Se acortarán los valores de la citada línea de influencia cada metro.

(EI = constante)

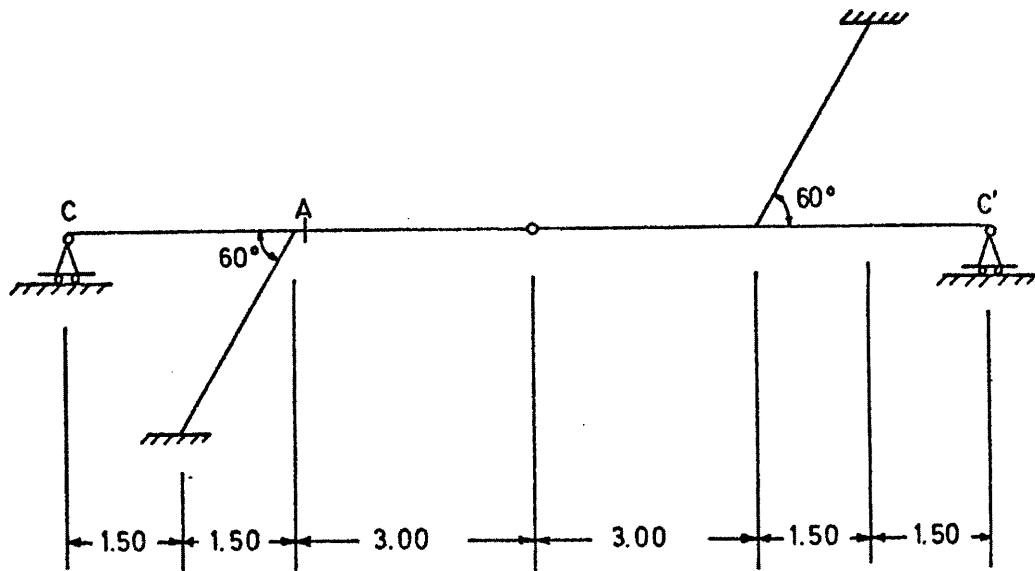


Fig. E 19.3 a

Aplicando el esquema dual, la línea de influencia pedida se obtiene a partir de los estados indicados en la figura E19.3b.

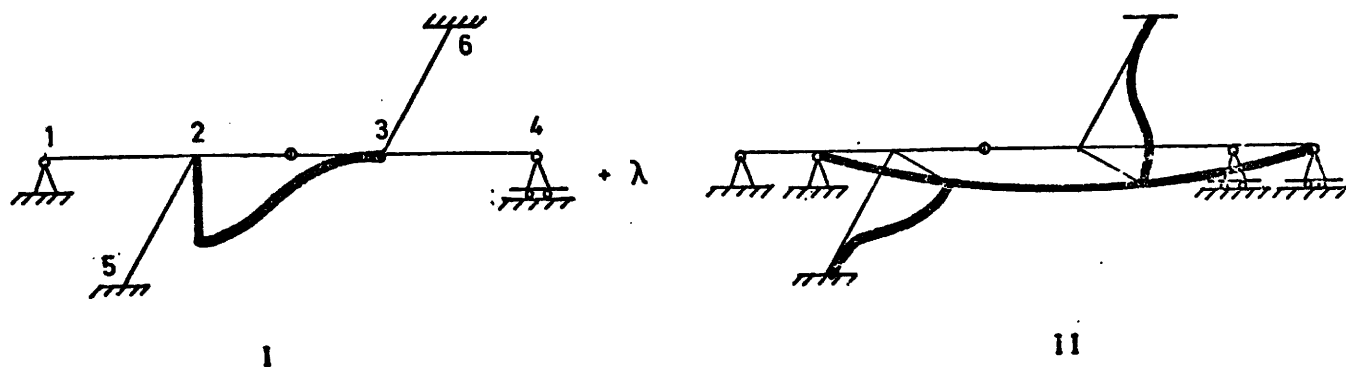


Fig. E19.3 b

A efectos de flexión, el estado I es antimétrico y el estado II es simétrico. Al plantear la ecuación de equilibrio, se observa que el estado II no es necesario (figura E19.3c):

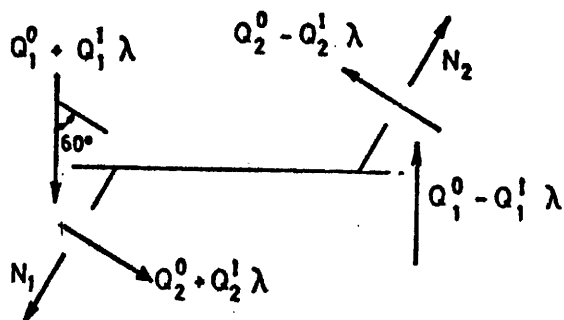


Fig. E19.3 c

Proyectando en la dirección perpendicular a N_1 y N_2 :

$$(Q_2^0 + Q_2^I \lambda) - (Q_2^0 - Q_2^I \lambda) + \frac{1}{2} (Q_1^0 + Q_1^I \lambda) - \frac{1}{2} (Q_1^0 - Q_1^I \lambda) = 0$$

Es decir:

$$(2Q_2^I + Q_1^I) \lambda = 0$$

$$\lambda = 0$$

Por lo tanto, sólo es necesario estudiar el estado I.

Características elastomecánicas de las barras:

$$R_{23} = R_{32} = \frac{\frac{4}{3} \frac{4}{3} (1-\frac{1}{4}) (1-\frac{1}{4})}{\frac{4}{3} (1-\frac{1}{4}) + \frac{4}{3} (1-\frac{1}{4})} = \frac{\frac{4}{3} (1-\frac{1}{4})}{2} = \frac{1}{2} ; \quad \gamma_{23} = \gamma_{32} = 1$$

$$R_{21} = R_{34} = \frac{3}{3} = 1 ; \quad R_{25} = R_{36} = \frac{4}{3} = 1,33$$

Momentos de empotramiento perfecto

$$\hat{M}_{23} = \hat{M}_{32} = -\{R_{23} + \gamma_{32} R_{32}\} \theta = -\{\frac{1}{2} + 1 \frac{1}{2}\} \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} = -0,167$$

Además:

$$R_{23}^A = R(1+\gamma) = \frac{1}{2} (1+1) = 1$$

Nudo	2		
Barra	2-1	2-5	2-3
R	1	1,333	1
K	0,30	0,40	0,30
\hat{M}	0	0,067	-0,167
R^I	0,050	0,067	0,050
Σ	0,050		0,117

$$M_{32} = M_{23} = -0,117$$

$$M_{34} = M_{21} = 0,050$$

$$M_{36} = M_{25} = 0,067$$

Las deformadas de los distintos tramos son las que siguen (figura E19.3d):

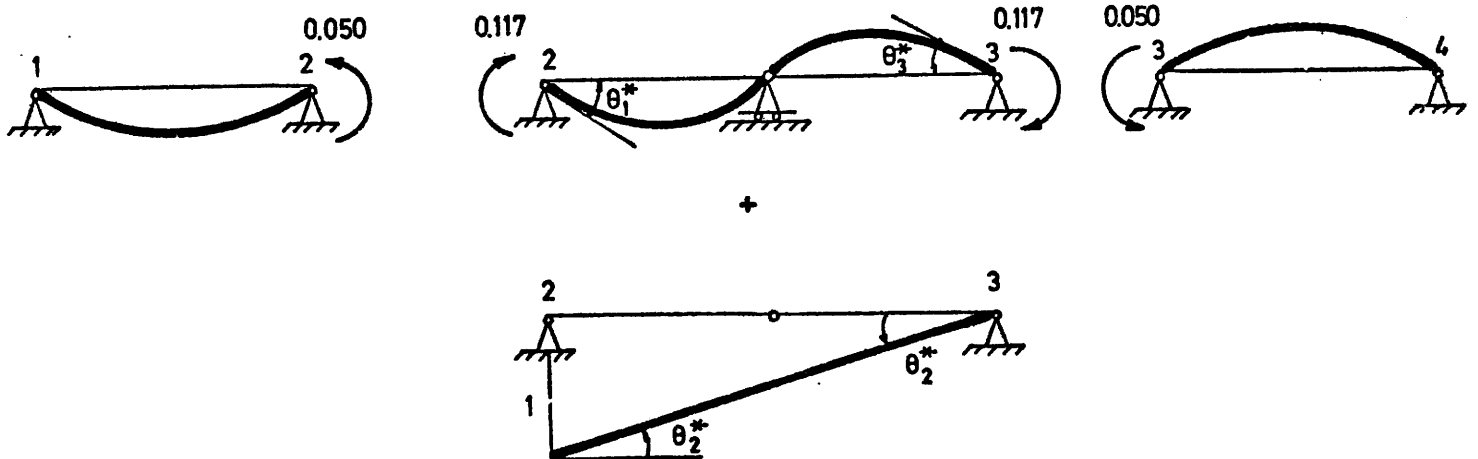


Fig. E 19.3 d

El giro final del nudo 2 es:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Barra 2-1: } \theta_2 = \frac{0,050}{1} = 0,050 \\ \text{Barra 2-5: } \theta_2 = \frac{0,067}{\frac{4}{3}} = 0,050 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Y por la barra 2-3} \\ \theta_2^* - \theta_1^* = \frac{1}{6} - \frac{0,117}{1} = 0,050 \end{array}$$

Giro final del nudo 3:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Barra 3-4: } \theta_3 = \frac{0,050}{1} = 0,050 \\ \text{Barra 3-6: } \theta_3 = \frac{0,067}{\frac{4}{3}} = 0,050 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Y a través de la barra 3-2:} \\ \theta_2^* - \theta_3^* = 0,167 - 0,117 = 0,050 \end{array}$$

Por lo tanto, las únicas deformadas que hay que considerar son las anteriores que se definen en la figura E19.3d y finalmente en la figura E19.3e.

La línea de influencia es la de la figura E19.3f.

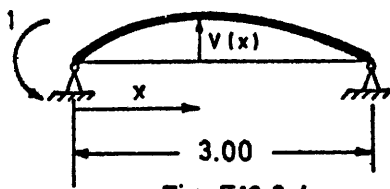


Fig. E19.3 d

$$V(x) = \frac{x}{18} (18 - 9x + x^2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1 ; V(x) = 0.555 \\ x = 2 ; V(x) = 0.444 \end{array} \right.$$

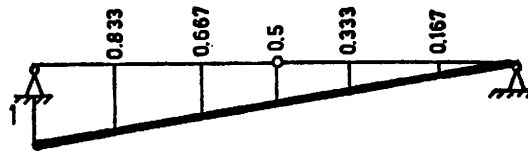
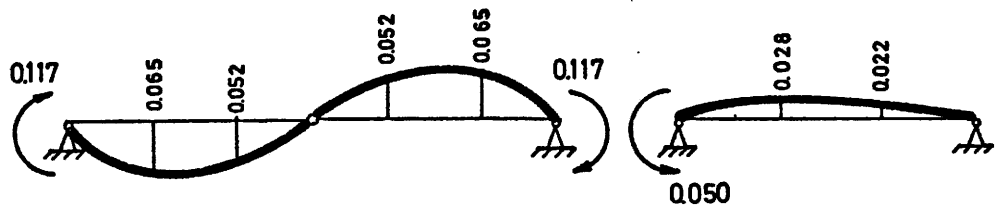
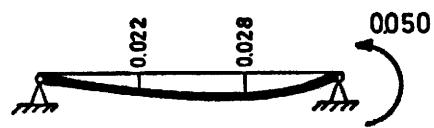


Fig. E 19.3 e

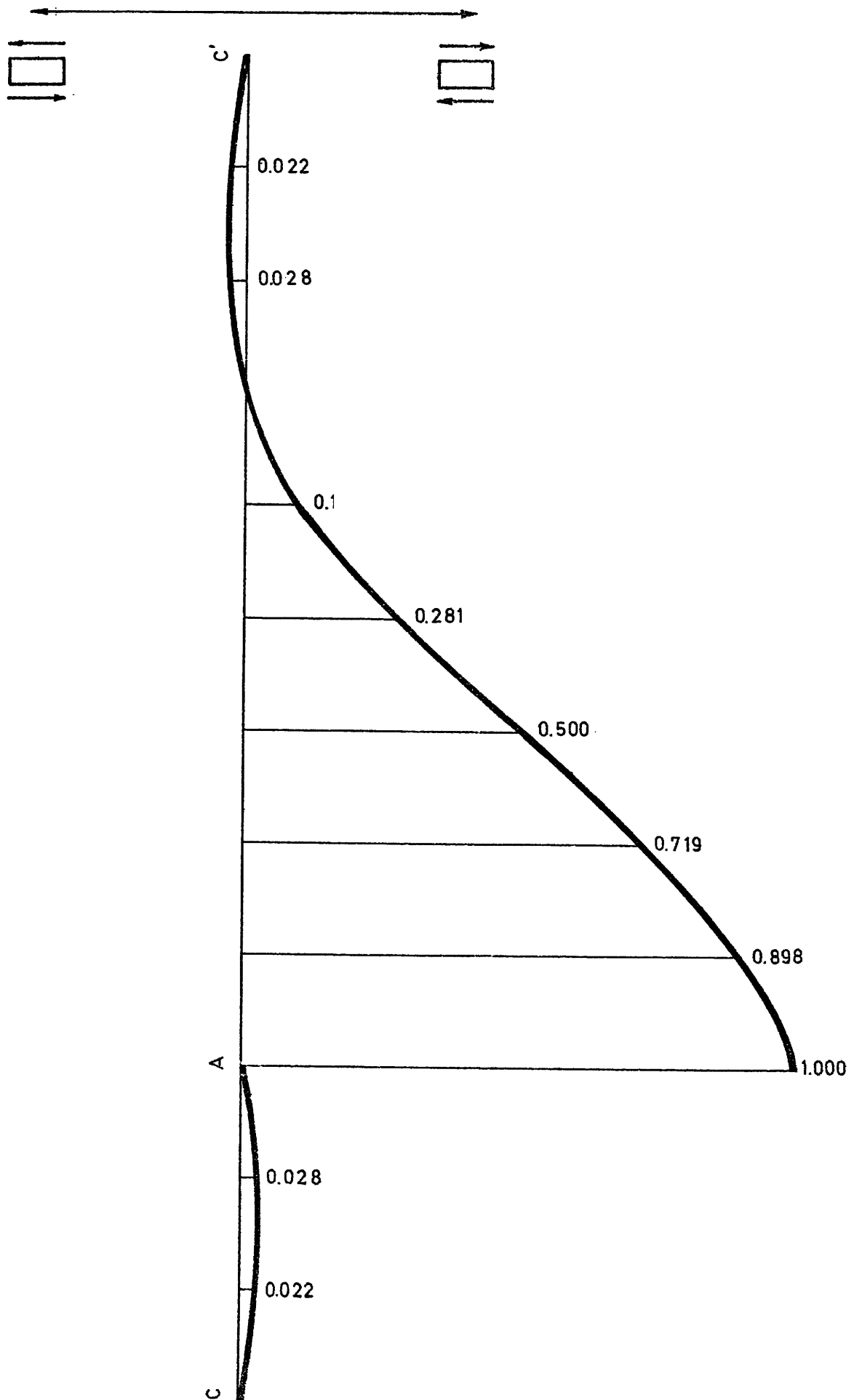


Fig. E 19.3 f

Ejercicio E19.4.

En la estructura de la figura E19.4a se pide:

Máximo y mínimo esfuerzo cortante en la sección A. (rótula) producido por una carga vertical uniforme descendente extendida en cualquier zona o zonas del dintel 0-1-2-3.

Todas las piezas son de sección constante e igual inercia I .

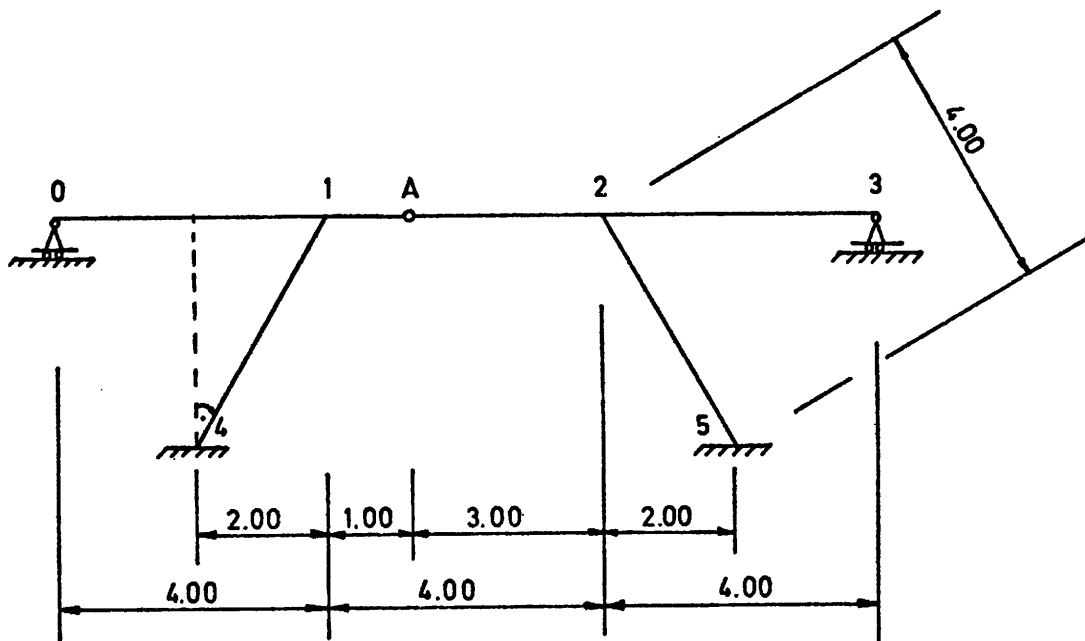


Fig. E 19.4 a

Por la aplicación del teorema de Maxwell (esquema dual), la obtención de la línea de influencia se reduce al cálculo de la ley de flechas de la suma de los dos estados que a continuación se indican:

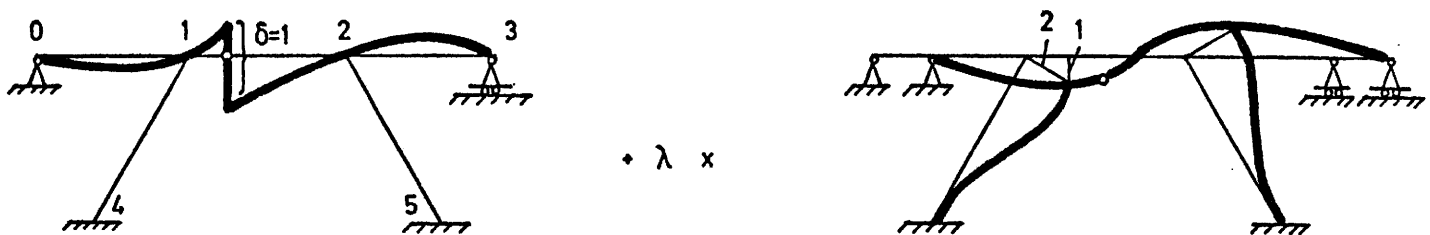
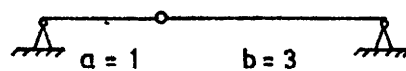


Fig. E 19.4 b

Características elastomecánicas de la pieza 1-2:



$$R_1 = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) 1^2}{\frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4}\right) + 4 \left(1 - \frac{1}{4}\right) 9} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} + 9} = \frac{3}{28}; \quad \boxed{R_1 \sim \frac{3}{28}}; \quad \boxed{\gamma_{12} = 3}$$

$$R_2 = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) 9}{\frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4}\right) + 4 \left(1 - \frac{1}{4}\right) 9} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 9}{\frac{1}{3} + 9} = \frac{27}{28}; \quad \boxed{R_2 \sim \frac{27}{28}}; \quad \boxed{\gamma_{21} = \frac{1}{3}}$$

Las otras barras tienen las siguientes características:

$$\boxed{R_{10} = R_{23} \sim \frac{3}{4}}; \quad \boxed{R_{14} = R_{25} \sim 1}$$

Los momentos de empotramiento perfecto en el estado I (se prescinde del factor común EI, o bien, se toma -- EI = 1) son (figura E19.4c).

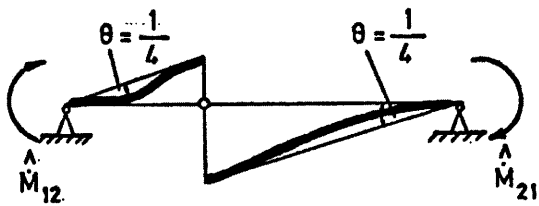


Fig. E19.4 c

$$\hat{M}_{12} = -\left(\frac{3}{28} \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \frac{27}{28} \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{28}$$

$$\hat{M}_{21} = -\left(\frac{27}{28} + 3 \frac{3}{28}\right) \frac{1}{4} = -\frac{9}{28}$$

Los momentos de empotramiento perfecto en el estado II son:

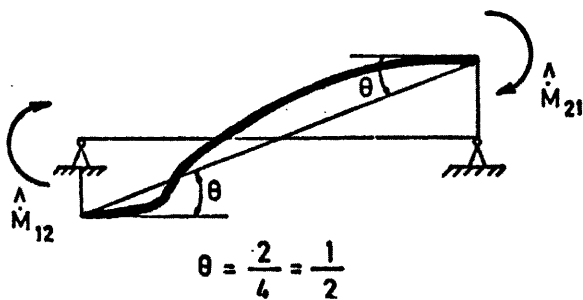


Fig. E19.4 d

$$\hat{M}_{12} = -\left(\frac{3}{28} + \frac{1}{3} \frac{27}{28}\right) \frac{1}{2} = -\frac{6}{28} = -\frac{3}{14}$$

$$\hat{M}_{21} = -\left(\frac{27}{28} + 3 \frac{3}{28}\right) \frac{1}{2} = -\frac{18}{28} = -\frac{9}{14}$$

$$\hat{M}_{10} = \hat{M}_{23} = \frac{3EI}{L} \theta = \frac{3}{4} \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

$$\hat{M}_{14} = \hat{M}_{25} = \frac{6EI}{L^2} \delta = \frac{6}{16} 2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \hat{M}_{41} = \hat{M}_{52}$$

Los Cross se realizan en las tablas E19.4a y E19.4b.

TABLA E19.4a. Estado I

Nudo	1			2		
Barra	1-0	1-4	1-2	2-1	2-5	2-3
R	0,75	1	0,107	0,964	1	0,75
K	0,40	0,54	0,06	0,35	0,37	0,28
\hat{M}	0	0	-0,107	-0,321	0	0
R^I	0,043	0,058	0,006	0,112	0,119	0,09
T^I	0	0	0,037	0,018	0	0
R^{II}	-0,015	-0,02	-0,002	-0,006	0,007	-0,005
Σ	0,028	0,038	-0,066	-0,197	0,112	0,085

$$M_{41} = (0,038-0) \cdot 0,5 + 0 = 0,019$$

$$M_{52} = (0,112-0) \cdot 0,5 + 0 = 0,056$$

$$Q_{10} = - \frac{0,028}{4} = -0,007$$

$$Q_{14} = - \frac{0,038 + 0,019}{4} = -0,01425$$

$$Q_{23} = - \frac{0,085}{4} = -0,01215$$

$$Q_{25} = - \frac{0,112 + 0,056}{4} = - 0,042$$

Tabla E19.4b.

ESTADO II

Nudo	1			2		
Barra	1-0	1-4	1-2	2-1	2-5	2-3
R	0,75	1	0,107	0,964	1	0,75
K	0,40	0,54	0,06	0,35	0,37	0,28
\hat{M}	0,1875	0,75	-0,2143	-0,643	0,75	0,1875
R^I	-0,289	-0,391	-0,043	-0,103	-0,109	-0,082
T^I	0	0	-0,034	-0,129	0	0
R^{II}	0,014	0,018	0,002	0,045	0,048	0,036
Σ	-0,088	0,377	-0,289	-0,83	0,689	0,141

$$M_{41} = (0,377 - 0,75) \cdot 0,5 + 0,75 = 0,564$$

$$M_{52} = (0,689 - 0,75) \cdot 0,5 + 0,75 = 0,720$$

$$Q_{10} = - \frac{-0,088}{4} = 0,022$$

$$Q_{14} = - \frac{0,377 + 0,564}{4} = -0,23525$$

$$Q_{23} = - \frac{0,141}{4} = -0,3535$$

$$Q_{25} = - \frac{0,689 + 0,72}{4} = -0,35225$$

La ecuación de equilibrio es (figura E19.4e):

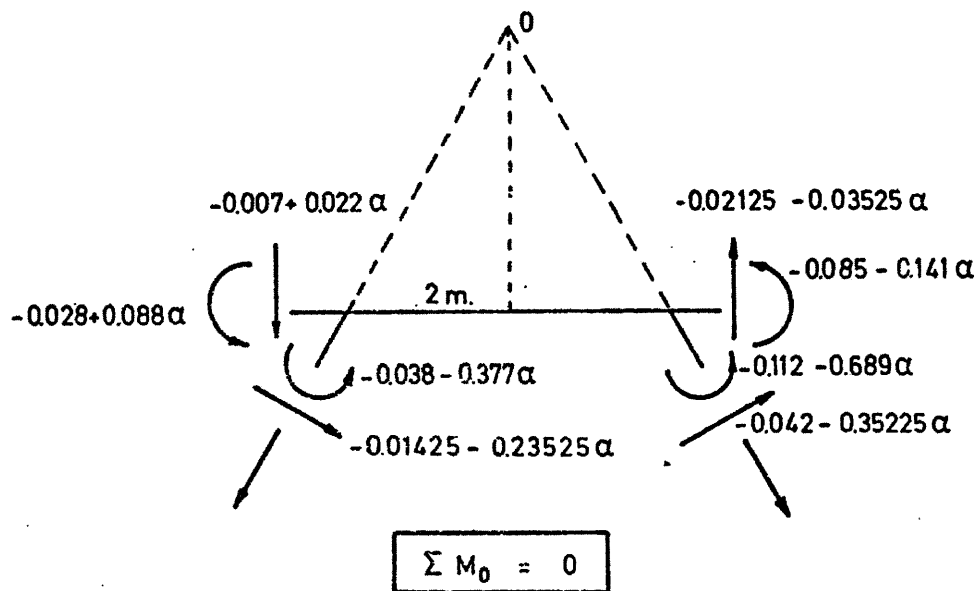


Fig.E19.4e

Al tomar momentos respecto al punto 0, resulta:

$$\begin{aligned} & -0,028 + 0,028\alpha - 0,038 - 0,377\alpha - 0,112 - 0,689\alpha - 0,085 - \\ & 0,141\alpha - 0,014 + 0,044\alpha - 0,057 - 0,941\alpha - 0,0425 - 0,0705\alpha - \\ & -0,168 - 1,409\alpha = 0 \end{aligned}$$

$$-0,5445 - 3,4955\alpha = 0$$

$$\alpha = -0,155772$$

Los momentos finales que interesen para el cálculo son los que siguen, habida cuenta de que se cumple:

$$M^F = M^I + \alpha M^{II}$$

$$M_{10} = 0,0417 ; \quad M_{12} = -0,0210 ; \quad M_{21} = -0,0677 ; \quad M_{23} = -0,0630$$

Giro final del nudo 1 (obtenido a través de la ba
rra 1-4):

$$\theta_1 = \frac{0,058 - 0,02 + \alpha (-0,391 + 0,018)}{1} = 0,0961$$

Como comprobación, el obtenido a través de la ba
rra 1-0 es:

$$\theta_1 = \frac{0,043 - 0,015 + \alpha (-0,289 + 0,014)}{0,75} = 0,09445$$

La diferencia de valores es debida a los pocos
repartos hechos en el "Cross". Tomando la media de ambos:

$$\theta_1 = 0,0953$$

Giro final del nudo 2:

$$\theta_2 = \frac{0,119 - 0,007 + \alpha (-0,109 + 0,048)}{1} = 0,121502 \quad (\text{barra 2-5})$$

$$\theta_2 = \frac{0,09 - 0,005 + \alpha (-0,082 + 0,036)}{0,75} = 0,1228872 \quad (\text{barra 2-3})$$

$$\theta_2 = 0,1222$$

La deformada final del dintel (línea de influencia) se obtiene por la suma de las diferentes leyes que se indican a continuación, en la figura E19.4f:

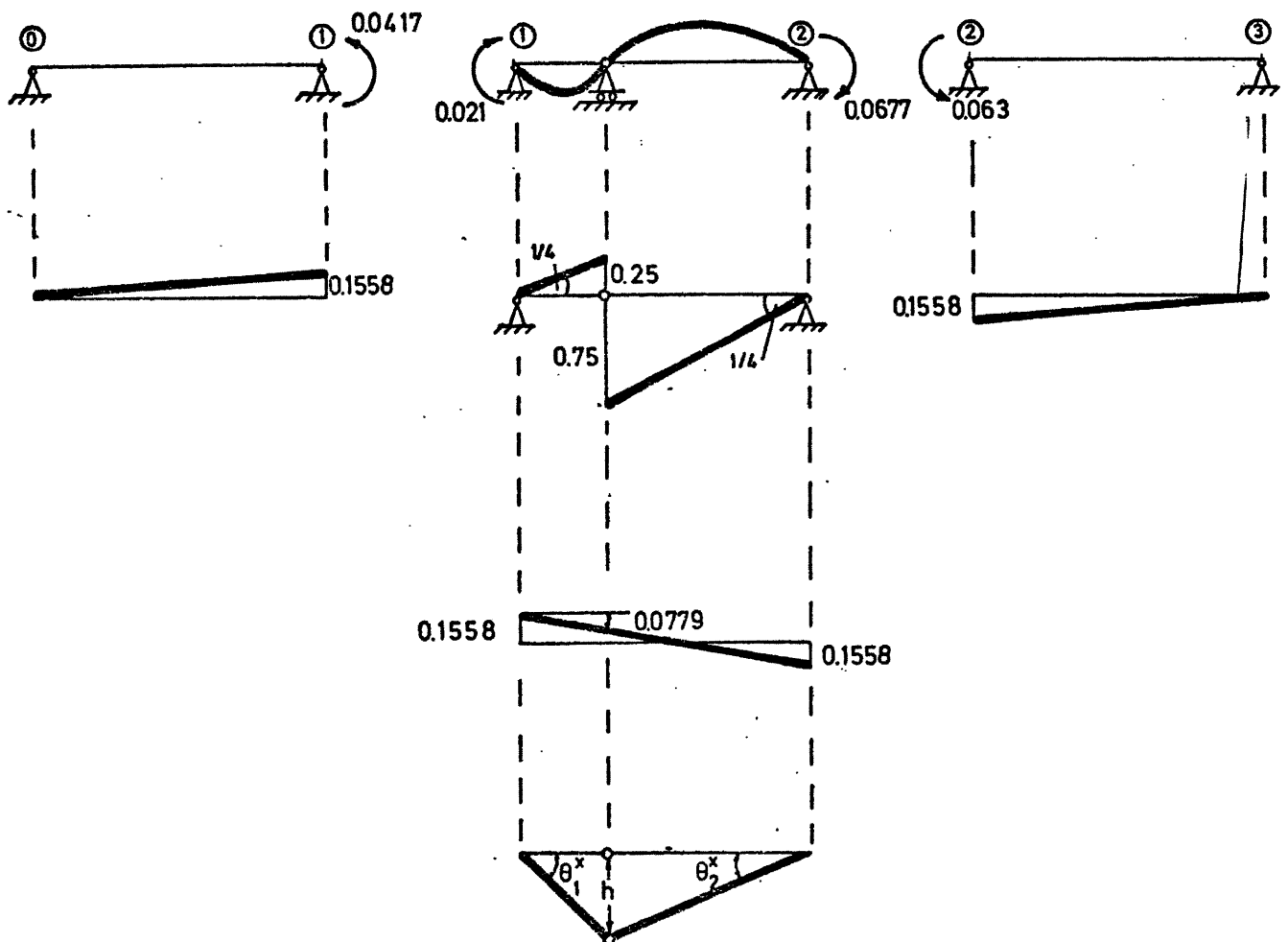


Fig. E19.4 f

$$\theta_1^o = - \frac{0,021}{\frac{3}{1}} = -0,007;$$

$$\theta_2^o = - \frac{0,0677}{\frac{3}{3}} = -0,0677$$

$$\left. \begin{aligned} -0,007 + 0,25 - 0,0779 + \theta_1^* &= 0,0953 \rightarrow \theta_1^* = -0,0698 \rightarrow h = 0,0698 \\ -0,0677 + 0,25 - 0,0779 + \theta_2^* &= 0,1222 \rightarrow \theta_2^* = 0,0178 \rightarrow h = 0,0534 \end{aligned} \right\} h = 0,0616$$

Al igual que se ha dicho anteriormente, el orden de aproximación se considera válido, habida cuenta de los pocos repartos realizados en el "Cross".

Para hallar la línea de influencia, en lo que se refiere a las deformadas por flexión, solamente se calculará la flecha en el punto medio de cada viga (figura E19.4g).

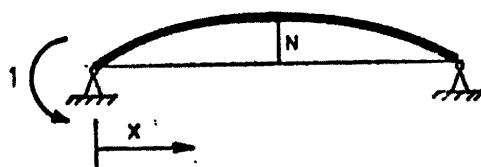


Fig. E19.4g

$$V(x) = \frac{x}{6L} (2L^2 - 3Lx + x^2)$$

Para $x = \frac{L}{2}$:

$$V = \frac{L/2}{6L} (2L^2 - 3L \frac{L}{2} + \frac{L^2}{4}) = \frac{L^2}{12} (\frac{8 - 6 + 1}{4}) = \frac{L^2}{16}$$

Viga 0-1:

$$V = -0,0417 \frac{16}{16} = -0,0417$$

Viga 1-Rótula:

$$V = -0,021 \frac{1}{16} = -0,0013$$

Viga Rótula-2:

$$V = 0,0677 \frac{9}{16} = 0,038$$

Viga 2-3:

$$V = 0,063 \frac{16}{16} = 0,063$$

La línea de influencia es, por lo tanto (figura E19.4h) :

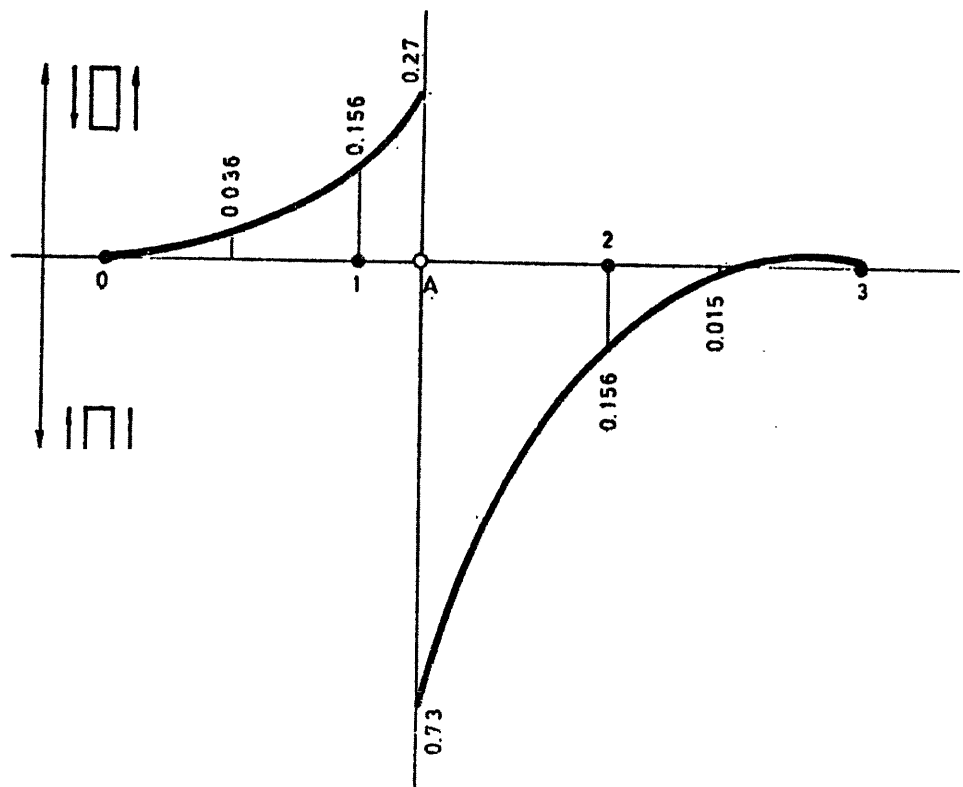


Fig E 19 4 h

Ejercicio E20.1.

En la estructura indicada en la figura E20.1a hallar el esfuerzo en el tirante y las leyes de esfuerzos en la barra AB y en la BC.

Características de las barras:

AB: : Area = 200 cm^2 . $E = 2 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$
Inercia = $0,0080 \text{ m}^4$

BC y CD : Inercia = $0,025 \text{ m}^4$ $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Kg/cm}^2$

AC : Area = 10 cm^2 $E = 2 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

Se despreciará el acortamiento por esfuerzo axial de las barras BC y CD.

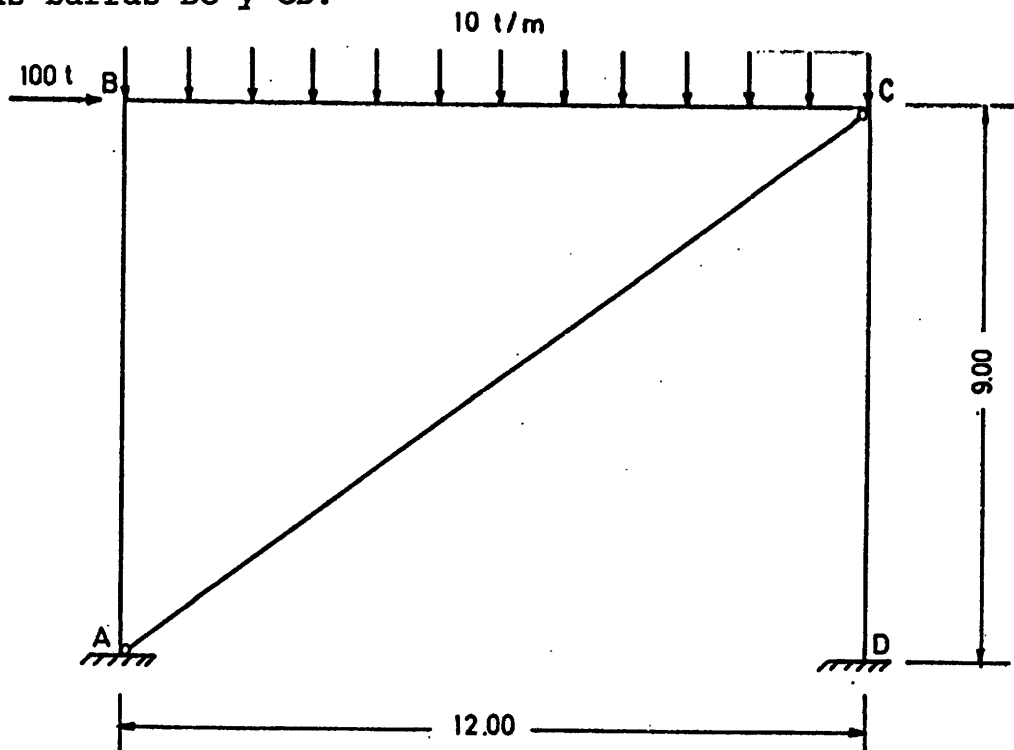


Fig. E20.1a

Se consideran los estados de la figura E19.1b.

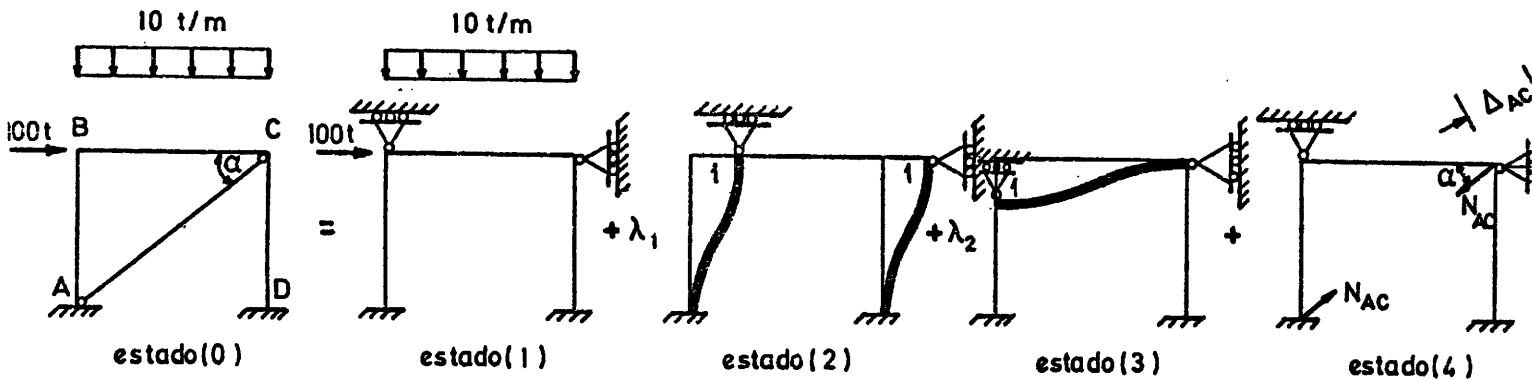


Fig. E 20.1 b

La tensión en el tirante es:

$$N_{AC} = \left(\frac{E\Omega}{L} \right)_{AC} \cdot \lambda_1 \cos \alpha$$

$$N_{AC} = \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3}}{15} \cdot 0,80 \cdot \lambda_1 = 1066,67 \lambda_1 \text{ de tracción.}$$

El esfuerzo axial en el pilar AB es:

$$N_{AB} = \left(\frac{E\Omega}{L} \right)_{AB} \cdot \lambda_2$$

$$N_{AB} = \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 200 \cdot 10^{-4}}{9} \lambda_2 = 44.444,44 \lambda_2 \text{ de compresión.}$$

Las rigideces de las barras son:

$$R_{BA} = \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 0,008}{9} = 17.777,78$$

$$R_{BC} = R_{CB} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 0,025}{12} = 4.166,67$$

$$R_{CD} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 0,025}{9} = 5.555,56$$

y los coeficientes de reparto:

	$K_{BA} = 0,81$		$K_{CB} = 0,43$
Nudo B		Nudo C	
	$K_{BC} = 0,19$		$K_{CD} = 0,57$

Los momentos de empotramiento de los distintos estados de la figura E20.1b son:

$$\text{Estado (1): } \hat{M}_{BC} = -\hat{M}_{CB} = \frac{PL^2}{12} = \frac{10 \cdot 12^2}{12} = 120$$

$$\text{Estado (2): } \hat{M}_{AB} = \hat{M}_{BA} = \frac{6EI}{L^2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 0,008}{9^2} = 11851,9$$

$$\hat{M}_{CD} = \hat{M}_{DC} = \frac{6EI}{L^2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0,025}{9^2} = 3703,7$$

$$\text{Estado (3): } \hat{M}_{BC} = \hat{M}_{CB} = -\frac{6EI}{L^2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0,025}{12^2} = -2083,3$$

Con estos resultados se efectúan los cálculos de Cross de los estados (1), (2) y (3) en las tablas E20.1a, E20.1b y E20.1c.

Tabla E20.1a Cross del Estado (1)

Nudo	B		C	
Barra	BA	BC	CB	CD
Y	0,5	0,5	0,5	0,5
R	17777,78	4166,67	4166,67	6555,56
K	0,81	0,19	0,43	0,57
\hat{M}	0,00	120,00	-120,00	0,00
M^I	-97,20	-22,80	51,60	68,40
M^{II}	0,00	25,80	-11,40	0,00
M^{III}	-20,90	-4,90	4,90	6,50
Σ	-118,10	118,10	-74,90	74,90

$$M_{AB} = -59,05 ;$$

$$M_{DC} = 37,45$$

Tabla E20.1b Cross del estado (2)

Nudo	B		C	
Barra	BA	BC	CB	CD
Y	0,5	0,5	0,5	0,5
R	17777,78	4166,67	4166,67	6555,56
K	0,81	0,19	0,43	0,57
\hat{M}	11851,90	0,00	0,00	3703,70
M^I	-9600,00	-2251,90	-1592,60	-2111,10
M^{II}	0,00	-796,30	-1126,00	0,00
M^{III}	645,00	151,30	484,20	641,80
Σ	2896,90	-2896,90	-2234,40	2234,40

$$M_{AB} = 7374,40 ;$$

$$M_{DC} = 2969,10$$

Tabla E20.1c Cross del estado (3)

Nudo	B		C	
Barra	BA	BC	CB	CD
γ	0,5	0,5	0,5	0,5
R	17777,78	4166,67	4166,67	6555,56
K	0,81	0,19	0,43	0,57
\hat{M}	0,00	-2083,30	-2083,30	0,00
M^I	1687,50	395,80	895,80	1187,50
M^{II}	0,00	447,90	197,90	0,00
M^{III}	-362,80	-85,10	-85,10	-112,80
Σ	1324,70	-1324,70	-1074,70	1074,70

$$M_{AB} = 662,40 ;$$

$$M_{DC} = 537,40$$

Para hallar los valores de λ_1 y λ_2 se plantea el equilibrio de fuerzas horizontales de la sección de la figura E20.1c y el equilibrio de fuerzas verticales del nudo B (figura E20.1d).

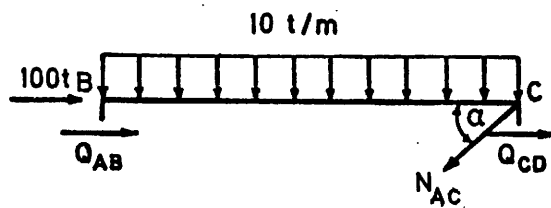


Fig. E 20.1c

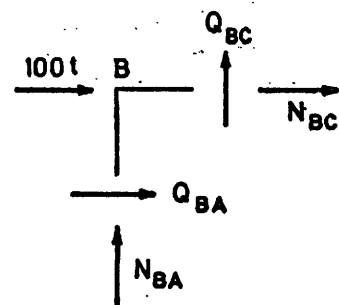


Fig. E20.1d

$$Q_{AB} + Q_{CD} - N_{AC} \cos \alpha + 100 = 0$$

$$\begin{aligned} & \left(- \frac{-59,05 - 118,10}{9} - \frac{2896,9 + 7374,4}{9} \lambda_1 - \frac{1324,7 + 662,4}{9} \lambda_2 \right) + \\ & + \left(- \frac{74,9 + 37,45}{9} - \frac{2234,4 + 2969}{9} \lambda_1 - \frac{1074,7 + 537,4}{9} \lambda_2 \right) - \\ & - 1066,67 \lambda_1 \cdot 0,80 + 100 = 0 \end{aligned}$$

$$107,2 - 2572,758 \lambda_1 - 399,911 \lambda_2 = 0$$

$$N_{AB} + Q_{BC} = 0$$

$$\begin{aligned} & 44444,44 \lambda_2 + \left(- \frac{10 \cdot 12}{2} - \frac{118,1 - 74,9}{12} - \frac{-2896,9 - 2234,4}{12} \lambda_1 - \right. \\ & \left. - \frac{-1324,7 - 1074,7}{12} \lambda_2 \right) = 0 \end{aligned}$$

$$-63,6 + 427,608 \lambda_1 + 44644,39 \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 = 41,507 \cdot 10^{-3}$$

$$\lambda_2 = 1,027 \cdot 10^{-3}$$

El esfuerzo en el tirante AC es:

$$N_{AC} = 1066,67 \cdot 41,507 \cdot 10^{-3} ; \quad N_{AC} = 44,27 \text{ t}$$

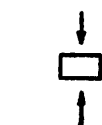
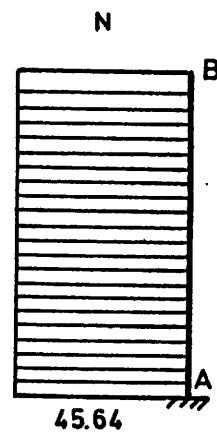
Los esfuerzos en la barra AB se representan en la figura E20.1e y son:

$$N_{AB} = 44444,44 \cdot 1,027 \cdot 10^{-3} = 45,64 \text{ t (compresión)}$$

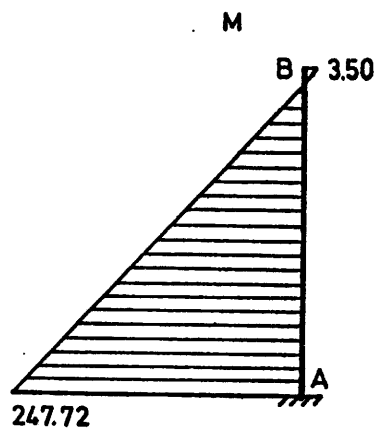
$$\begin{aligned} M_{AB} &= -59,05 + 7374,4 \cdot 41,507 \cdot 10^{-3} + 662,4 \cdot 1,027 \cdot 10^{-3} = \\ &= 247,72 \text{ m.t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{BA} &= -118,1 + 2896,9 \cdot 41,507 \cdot 10^{-3} + 1324,7 \cdot 1,027 \cdot 10^{-3} = \\ &= 3,50 \text{ m.t} \end{aligned}$$

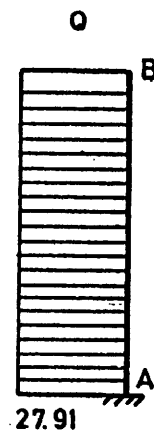
$$Q_{AB} = - \frac{247,72 + 3,50}{9} = -27,91 \text{ t}$$



Ley de axiles



Ley de momentos flectores



Ley de cortantes

Fig. E20.1e

Para hallar el axil en la barra BC hay que considerar el equilibrio horizontal del nudo B (figura E20.1d).

$$N_{BC} + Q_{AB} + 100 = 0$$

$$N_{BC} = -Q_{AB} - 100 = -(-27,91) - 100 = -72,09 \text{ (compresión)}$$

Los esfuerzos en BC se representan en la figura E20.1f y son:

$$M_{BC} = 118,1 - 2896,9 \cdot 41,507 \cdot 10^{-3} - 1324,7 \cdot 10^{-3} = -3,50 \text{ m.t}$$

$$\begin{aligned} M_{CB} &= -74,9 - 2234,4 \cdot 41,507 \cdot 10^{-3} - 1074,7 \cdot 1,027 \cdot 10^{-3} = \\ &= -168,75 \text{ m.t} \end{aligned}$$

$$Q_{BC} \text{ hiperestático} = Q_{CB} \text{ hiperestático} = \frac{168,75 + 3,50}{12} = 14,35 \text{ t}$$

$$Q_{BC} \text{ isostático} = -Q_{CB} \text{ isostático} = -60 \text{ t}$$

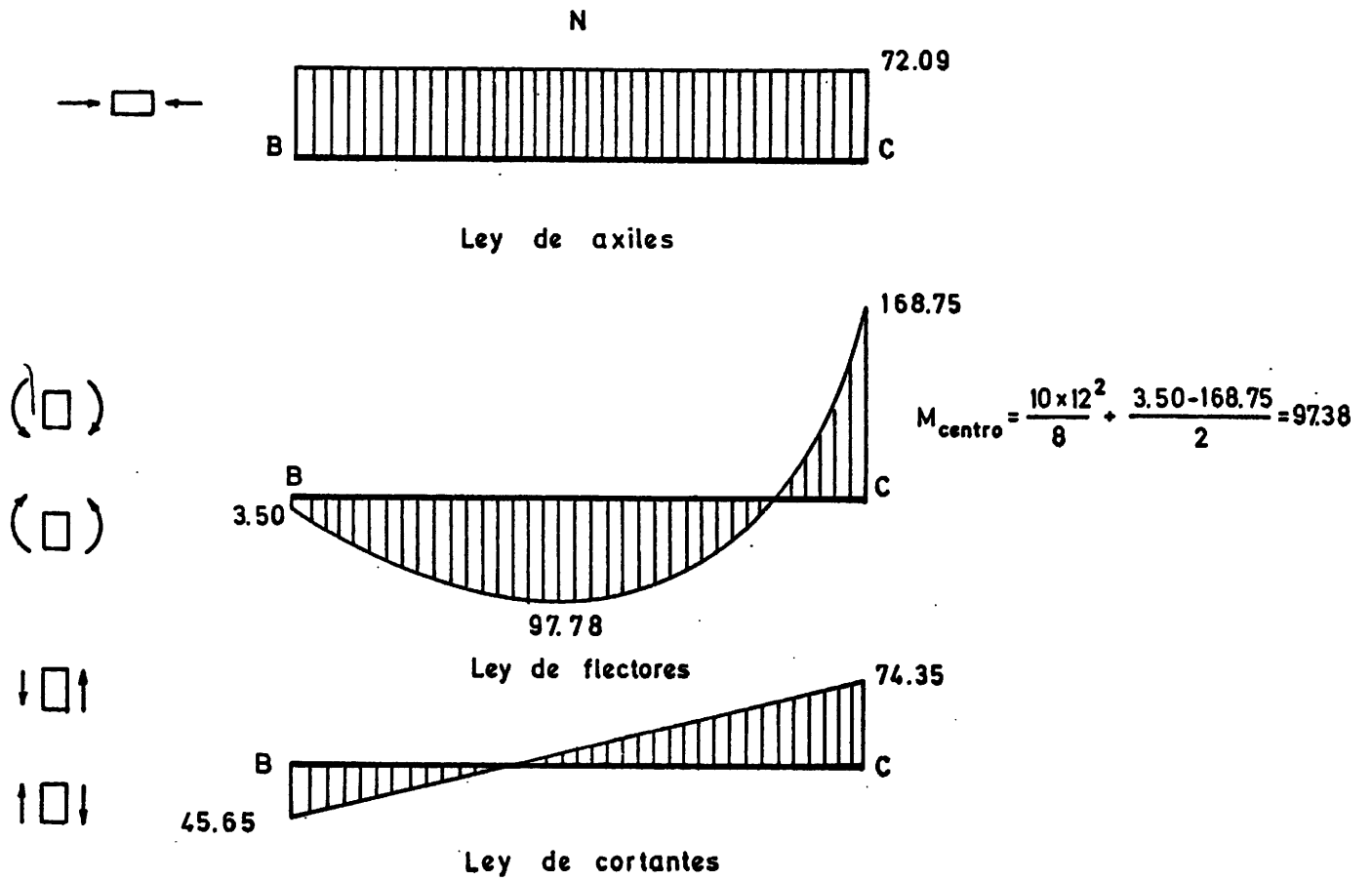


Fig. E20.1f

Ejercicio E20.2.

En la estructura de la figura E20.2a la barra BC es simétrica y tal como se indica en la misma, está formada por tramos de inercia constante, con:

$$I_1 = 8,00 \text{ m}^4, I_2 = 2,00 \text{ m}^4$$

Características de las otras barras:

AF y ED: Area =	$3,00 \text{ m}^2$	Inercia =	$0,00 \text{ m}^4$
AB y CD: Area =	$15,00 \text{ m}^2$	Inercia =	$3,00 \text{ m}^4$
BF y CE: Area =	$15,00 \text{ m}^2$	Inercia =	$3,00 \text{ m}^4$

Módulo de elasticidad de todas las barras:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

Excepto las barras AF y ED, se considera que son todas inextensibles.

Para una carga puntual móvil de 100 t., obtener en la sección central de la barra BC:

- Momento flector máximo y mínimo.
- Esfuerzo cortante máximo y mínimo.

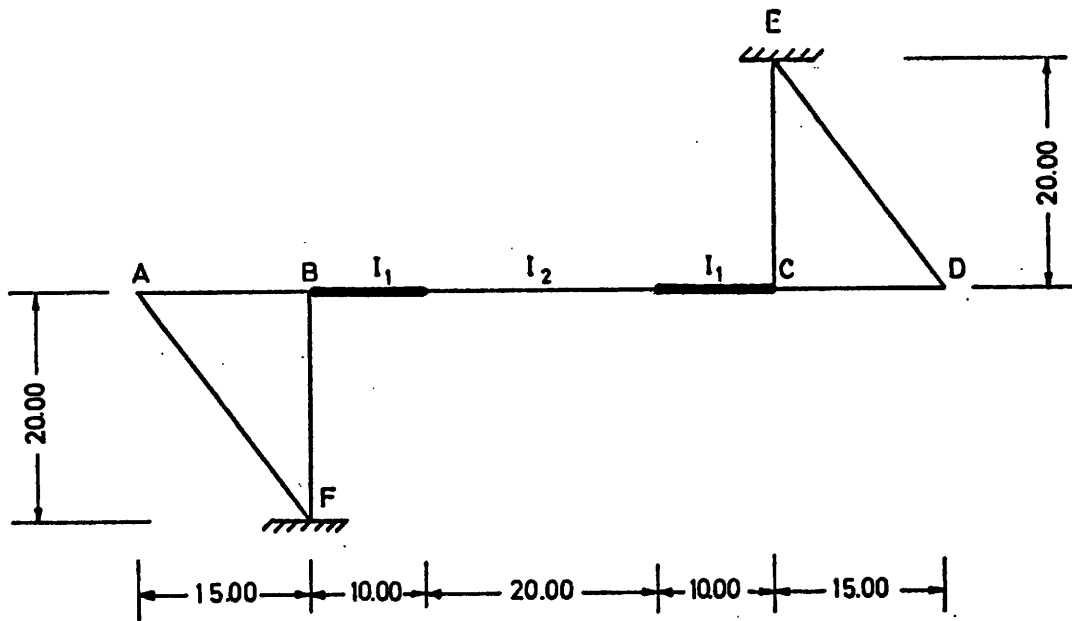
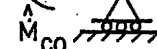
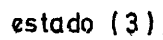
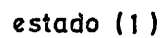


Fig. E 20. 2a



Se hallará la línea de influencia del momento flector y del cortante en el punto H de la figura E20.2b.

Para hallar la línea de influencia del flector en el punto H se introduce una deformación de 1 radián. Este estado se descompone en los tres indicados en la misma figura E20.2b.

Los momentos de empotramiento del estado (1) y las características de la barra BC se deducen como sigue.
(Ver figuras E20.2c y E20.2d):

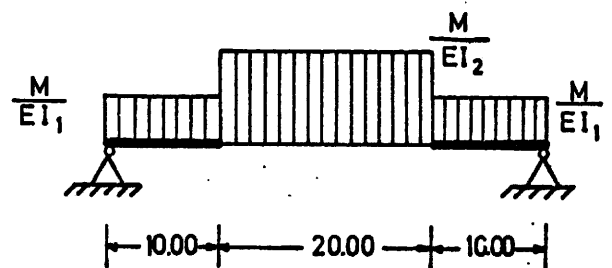
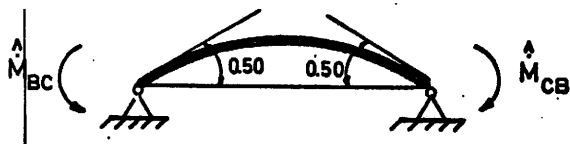


Fig. E 20. 2 c

$$\theta_b + \theta_c = 1 = \frac{20M}{EI_1} + \frac{20M}{EI_2}$$

$$M = \frac{1}{\frac{20}{EI_1} + \frac{20}{EI_2}} = \frac{EI_1 \cdot I_2}{20(I_1 + I_2)} ; M = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 8 \cdot 2}{20(8 + 2)} = 16 \cdot 10^4 \text{ m.t}$$

La rigidez simétrica es:

$$R_{s_{BC}} = \frac{M}{\theta} = \frac{16 \cdot 10^4}{0,50} = 32 \cdot 10^4$$

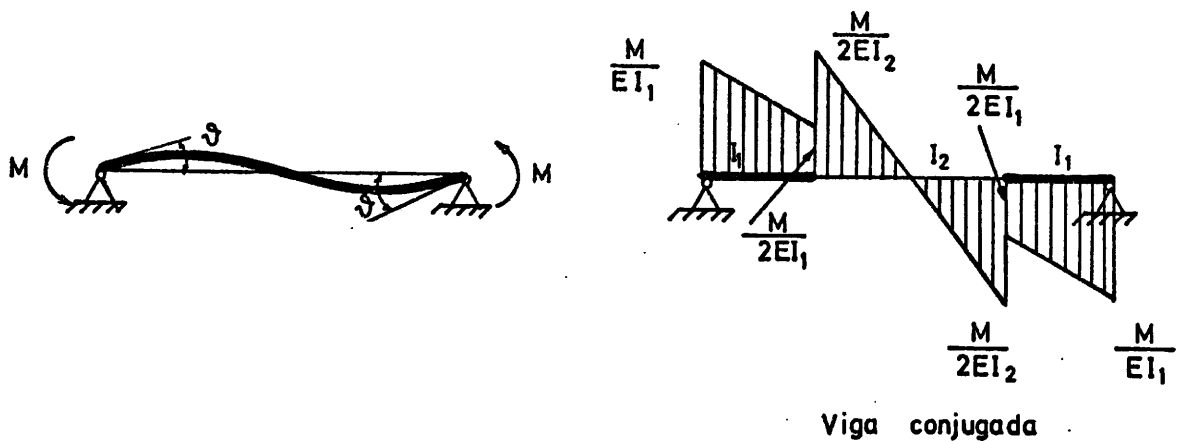


Fig. E 20.2 d

La rigidez antimétrica se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{40} \left(- \frac{M}{2EI_1} \cdot 10 \cdot \frac{10}{2} - \frac{1}{2} \frac{M}{2EI_1} \cdot 10 \cdot \frac{10}{3} - \frac{1}{2} \frac{M}{2EI_2} \cdot 10 \left(10 + \frac{10}{3} \right) + \frac{1}{2} \frac{M}{2EI_2} \cdot 10 \left(20 + \frac{2}{3} \cdot 10 \right) + \frac{M}{2EI_1} \cdot 10 \left(30 + \frac{10}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{M}{2EI_1} \cdot 10 \left(30 + \frac{2}{3} \cdot 10 \right) \right) = \frac{M}{40E} \left\{ \left(\frac{233,33}{I_1} + \frac{33,33}{I_2} \right) \right\} = \\ &= 5,729 \cdot 10^{-7} \cdot M \end{aligned}$$

$$R_{A_{BC}} = \frac{M}{\theta} = 174,55 \cdot 10^4$$

Las rigideces de las demás barras son:

$$R_{BF} = R_{CE} = \frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3}{20} = 120 \cdot 10^4$$

$$R_{BA} = R_{CD} = \frac{3EI}{L} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3}{15} = 120 \cdot 10^4$$

Los momentos de empotramiento de los estados (1), (2) y (3) son:

$$\text{estado (1): } \hat{M}_{BC} = -\hat{M}_{CD} = 16 \cdot 10^4 \text{ m.t}$$

$$\text{estado (2): } \hat{M}_{BF} = -\hat{M}_{CE} = \frac{6EI}{L^2} = 9 \cdot 10^4 \text{ m.t}$$

$$\text{estado (3): } \hat{M}_{BA} = -\hat{M}_{CD} = \frac{3EI}{L^2} = 8 \cdot 10^4 \text{ m.t}$$

La resolución de los Cross de los estados (1), (2) y (3) se indica en las tablas E20.2a, E20.2b y E20.2c. La viga BC se comporta como simétrica. Los momentos en extremos de barra se representan en las figuras E20.2e, E20.2f y E20.2g.

Tabla E20.2a Cross del estado (1). Los momentos hay que multiplicarlos por 10^4 .

Nudo	B		
Barra	BA	BC	BF
γ			0,5
R	120,00	32,00	120,00
K	0,44	0,12	0,44
\hat{M}	0,00	16,00	0,00
M^I	-7,04	-1,92	-7,04
Σ	-7,04	14,08	-7,04

$$M_{FB} = -3,52$$

Tabla E20.2b Cross del estado (2). Los momentos hay que multiplicarlos por $10^4 \lambda_1$.

Nudo	B		
Barra	BA	BC	BF
γ			0,5
R	120,00	32,00	120,00
K	0,44	0,12	0,44
\hat{M}	0,00	0,00	9,00
M^I	-3,96	-1,08	-3,96
Σ	-3,96	-1,08	5,04

$$M_{FB} = 9 + \frac{1}{2}(5,04 - 9) = 7,02$$

$$\Delta_{AF} = -0,6 \lambda_1$$

$$\Delta_{DE} = 0,6 \lambda_1$$

Tabla E20.2c Cross del estado (3). Los momentos hay que multiplicarlos por $10^4 \lambda_2$.

Nudo	B		
Barra	BA	BC	BF
γ			0,5
R	120,00	32,00	120,00
K	0,44	0,12	0,44
\hat{M}	8,00	0,00	0,00
M^I	-3,52	-0,96	-3,52
Σ	4,48	-0,96	-3,51

$$M_{FB} = -1,76$$

$$\Delta_{AF} = 0,8 \lambda_2$$

$$\Delta_{DE} = -0,8 \lambda_2$$

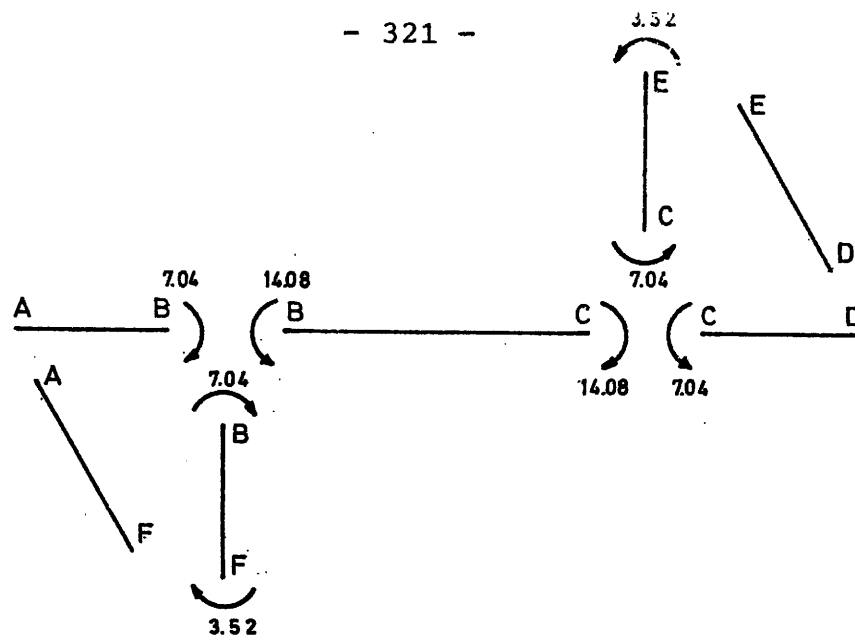


Fig. E20.2e.- Estado (1)

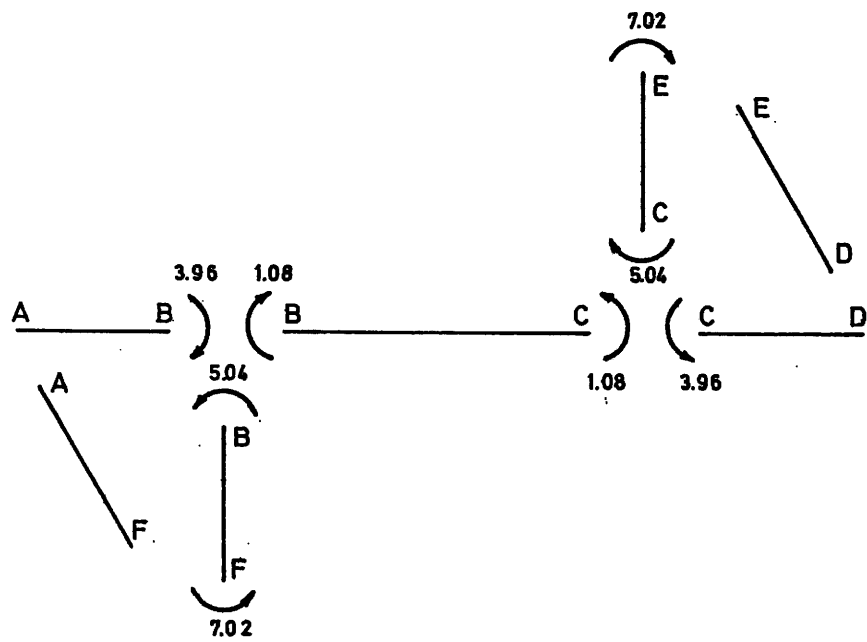


Fig. E20.2f.- Estado (2)

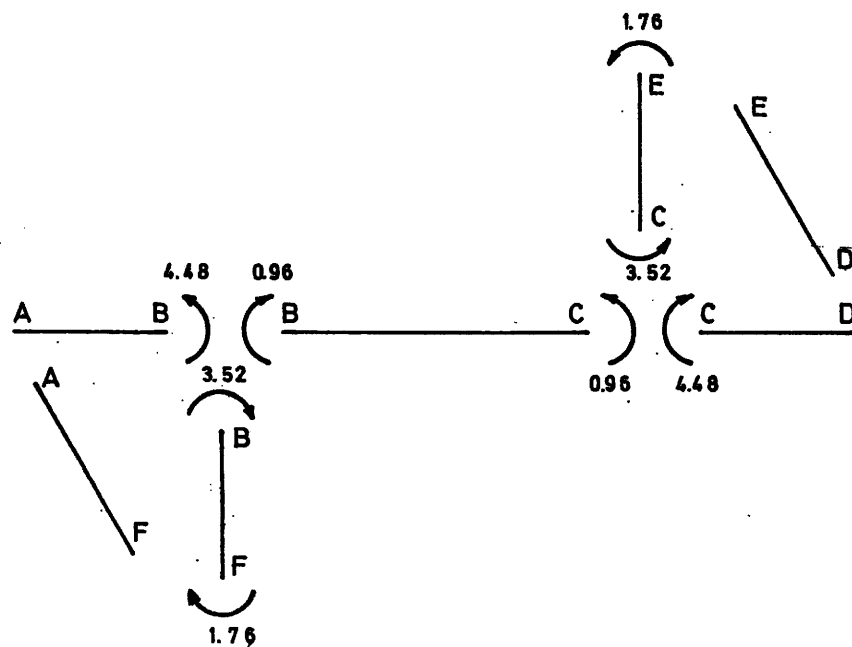


Fig. E20.2g. Estado (3)

Obligando al equilibrio de fuerzas horizontales del corte de la figura E20.2h y al equilibrio vertical del nudo A (figura E20.2i) se tiene:

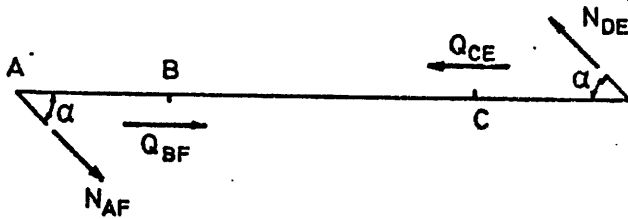


Fig. E20.2h

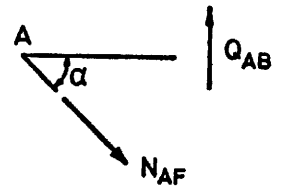


Fig. E20.2i

$$Q_{BF} - Q_{CE} + (N_{AF} - N_{DE}) \cos \alpha = 0$$

$$2 \left(-\frac{-7,04 - 3,52}{20} - \frac{5,04 + 7,02}{20} \lambda_1 - \frac{-3,52 - 1,76}{20} \lambda_2 \right) \cdot 10^4 +$$

$$+ \left(2 \frac{(-0,6\lambda_1 + 0,8\lambda_2) \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3}{25} \right) 0,6 = 0$$

$$1,056 - 18,486\lambda_1 + 23,568\lambda_2 = 0 \quad (1)$$

$$Q_{AB} - N_{AF} \cdot \sen \alpha = 0$$

$$\left(\frac{7,04}{15} + \frac{3,96}{15} \lambda_1 - \frac{4,48}{15} \lambda_2 \right) \cdot 10^4 - \left(\frac{(-0,6\lambda_1 + 0,8\lambda_2) 2 \cdot 10^6 \cdot 3}{25} \right) 0,8 = 0$$

$$0,46933 + 11,784\lambda_1 - 15,65866\lambda_2 = 0 \quad (2)$$

De (1) y (2) resulta:

$$\lambda_1 = 2,3505 ;$$

$$\lambda_2 = 1,7989$$

Los momentos finales en extremos de barra se representan gráficamente con la figura E20.2j.

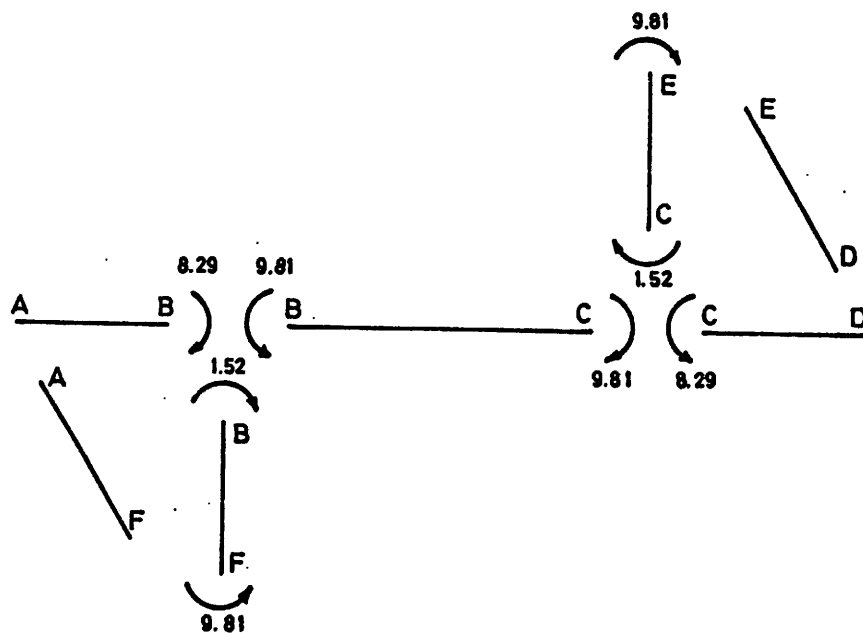

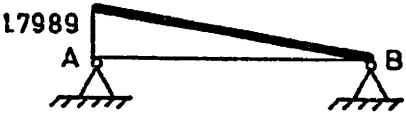

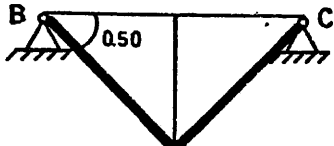
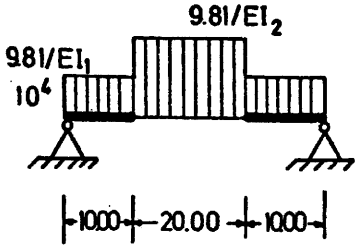


Fig. E 20. 2j

En la tabla E20.2d se hallan los valores de la línea de influencia del momento flector en H.

Tabla E20.2d.

Deformada de AB	Deformada de BC
 <p style="text-align: center;">+</p>  $V = \frac{2,8 \cdot 10^4}{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3} (15x - \frac{x^3}{15}) + 1,7989 (1 - \frac{x}{15})$ <p>$V_{\text{máx}}$ para $x = 0$</p> <p>$M_{\text{máx}}^- = -179,89 \text{ m.t}$ (□)</p>	 <p style="text-align: center;">+</p>  <p>Giro en B: $v_B = \frac{9,81 \cdot 10^4}{32 \cdot 10^4} = 0,31 < 0,50$</p> <p>como no hay cambio de signo de la línea de influencia en BC el máximo se da en el centro.</p> <p>La flecha en el centro es:</p>  $V = -10^4 \left(\frac{9,81}{EI_1} 10 \cdot 5 + \frac{9,81}{EI_1} 10 \cdot 15 \right) + 0,50 \cdot 20 = 6,015 \text{ m}$ <p>Para una carga de 100 t</p> <p>$M_{\text{máx}}^+ = 601,50 \text{ m.t}$ (□)</p>

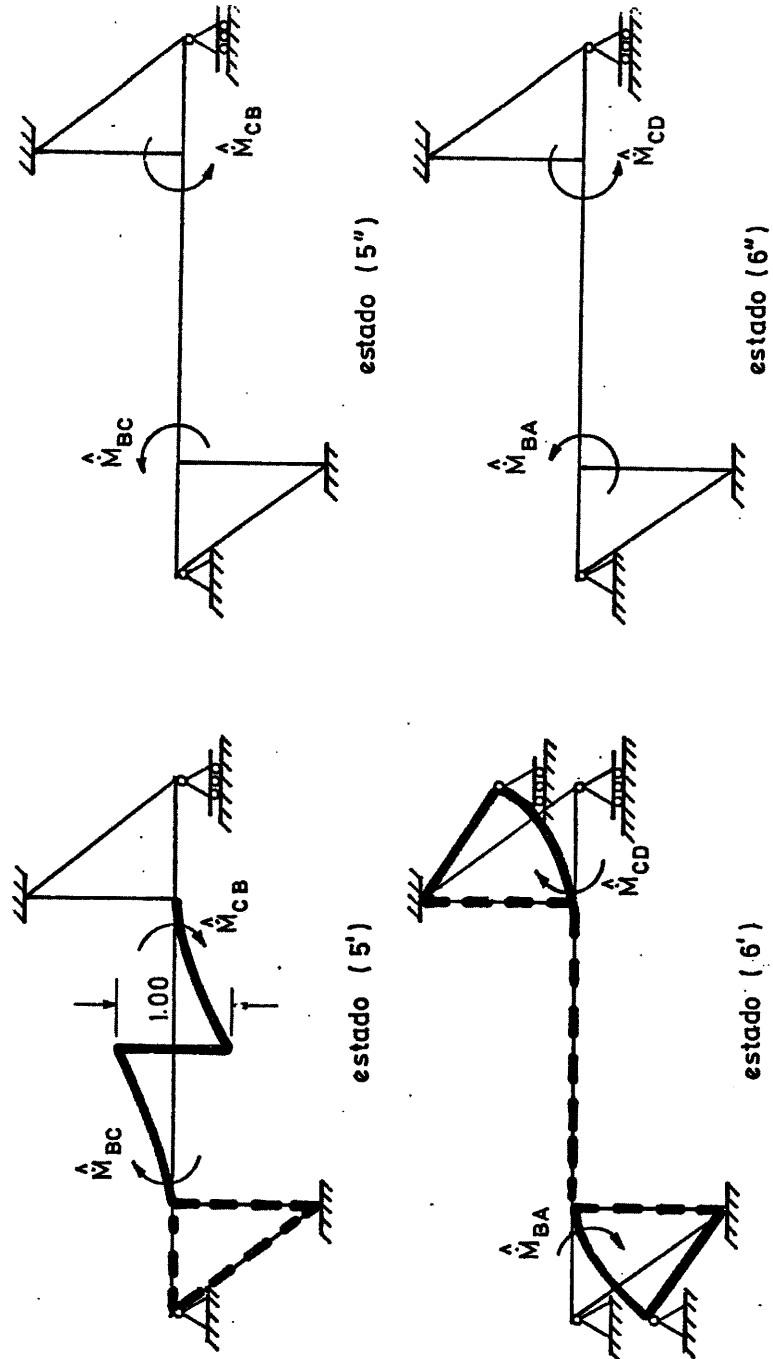
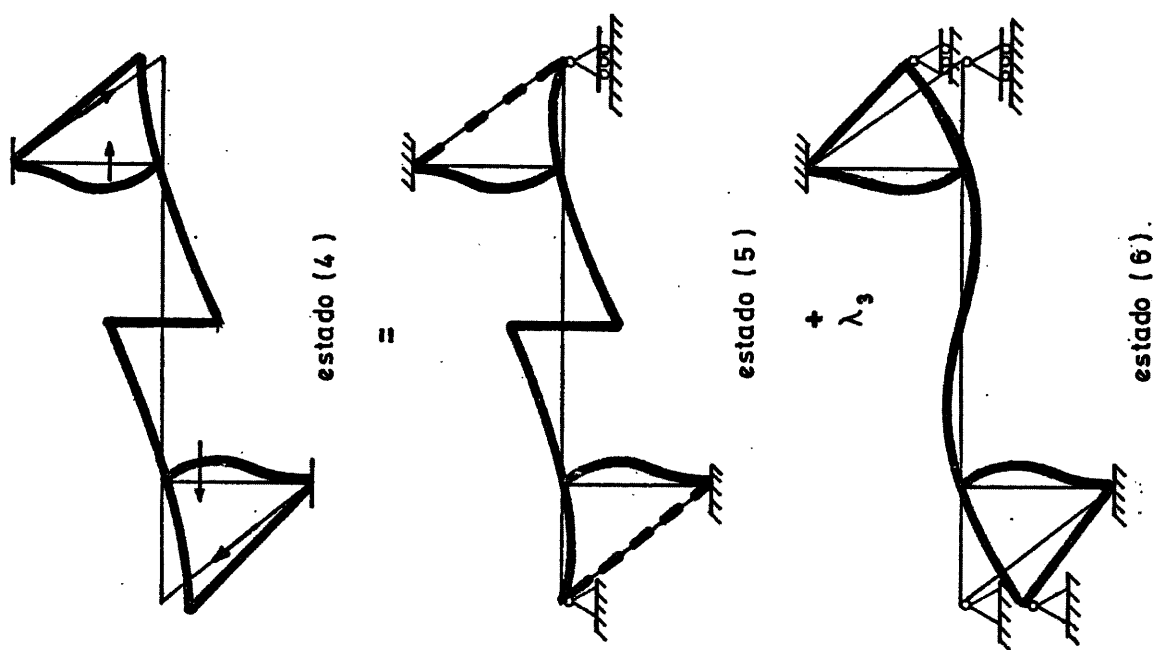


Fig. E 20. 2 k

Para la línea de influencia del cortante en H, se resuelve el estado (4) de la figura E20.2K. Ese estado no experimenta desplazamientos horizontales, debido a la simetría central, tanto en geometría como en acciones exteriores.

Los momentos de empotramiento de los estados (5') y (6') son (figura E20.21):

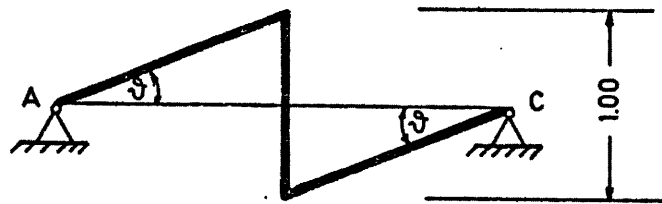


Fig. E20. 21

$$40\theta = 1 ; \quad \theta = 0,025$$

$$\hat{M}_{CB} = \hat{M}_{A_{BC}} = R_{A_{BC}}(-\theta) = 174,55 \cdot 10^4 (-0,025) = -4,364 \cdot 10^4 \text{ m.t}$$

$$\hat{M}_{BA} = \hat{M}_{CD} = -\frac{3EI}{L^2} = -\frac{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3}{15^2} = -8 \cdot 10^4 \text{ m.t}$$

En este caso la rigidez de BC es la antimétrica.

En las tablas E20.2e y E20.2f se indican los cálculos de Cross de los estados (5) y (6). Los momentos en extremos de barra se representan en las figuras E20.2m y E20.2n.

Tabla E20.2e. Cross del estado (5)

Nudo	B		
Barra	BA	BC	BF
γ			0,5
R	120,00	174,55	120,00
K	0,29	0,42	0,29
\hat{M}	0,00	-4,36	0,00
M^I	1,27	1,83	1,27
Σ	1,27	-2,53	1,27

$$M_{FB} = 0,63$$

Tabla E20.2f. Cross del estado (6)

Nudo	B		
Barra	BA	BC	BF
γ			0,5
R	120,00	174,55	120,00
K	0,29	0,42	0,29
\hat{M}	-8,00	0,00	0,00
M^I	2,32	3,36	2,32
Σ	-5,68	3,36	2,32

$$M_{FB} = 1,16$$

$$\Delta_{AF} = \Delta_{DE} = -0,8\lambda_3$$

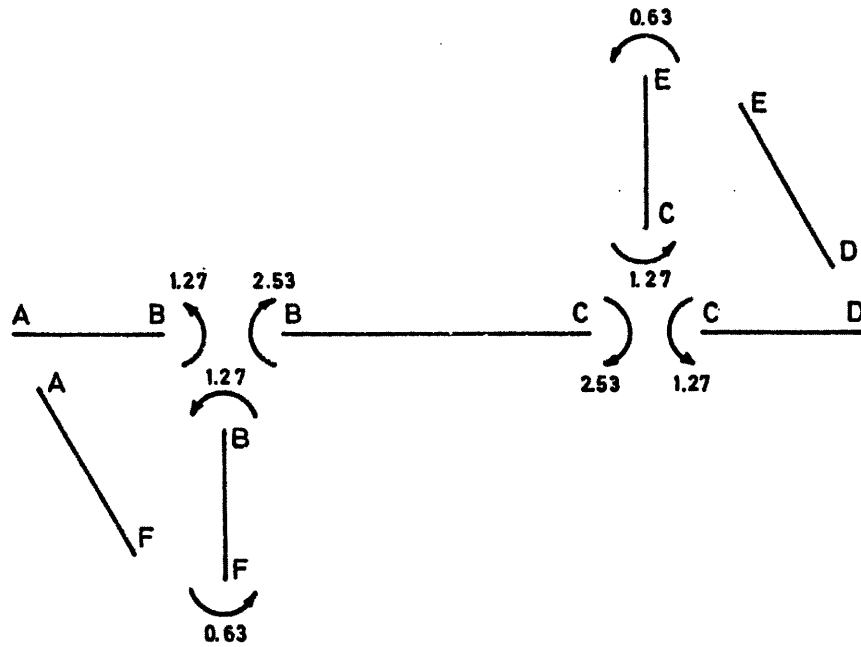


Fig. E20.2 m.- Estado (5) Hay que multiplicar los momentos por 10^4

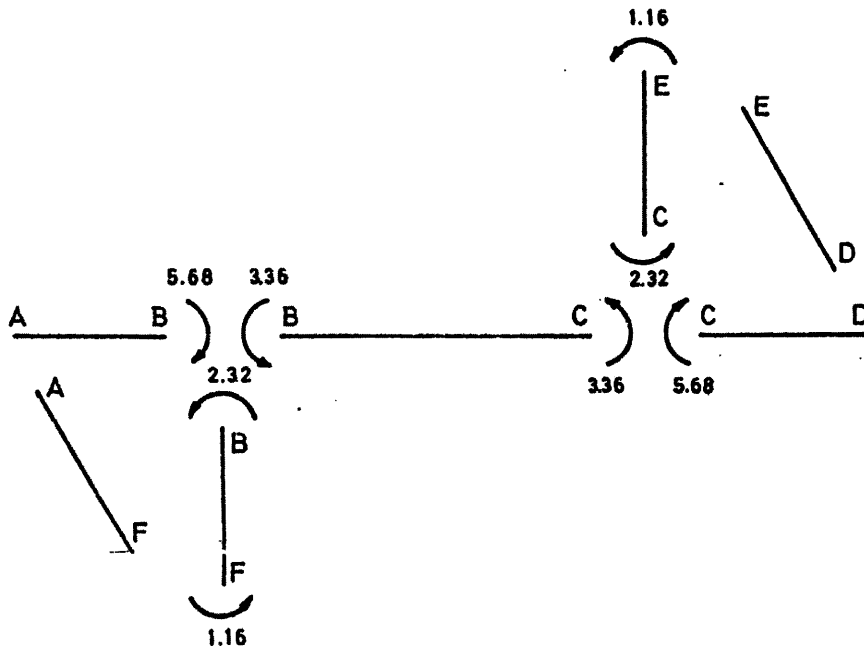


Fig. E20.2 n.- Estado (6) Hay que multiplicar los momentos por 10^4

Efectuando el equilibrio de fuerzas verticales en el nudo A (figura E20.2p) se tiene:

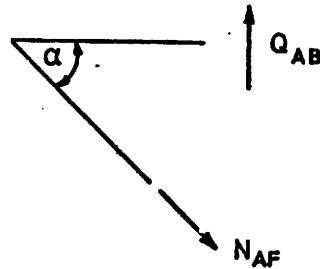


Fig. E 20. 2 p

$$Q_{AB} - N_{AF} \cdot \text{sen} \alpha = 0$$

$$\left(-\frac{1,266}{15} + \frac{5,68}{15} \lambda \right) \cdot 10^4 - \left(\frac{-0,8\lambda + 2 \cdot 10^6 \cdot 3}{25} \right) \cdot 0,8 = 0$$

$$-0,0844 + 15,7386\lambda = 0 ; \lambda_3 = 5,36 \cdot 10^{-3}$$

Los momentos finales se dibujan en la figura E20.2q.

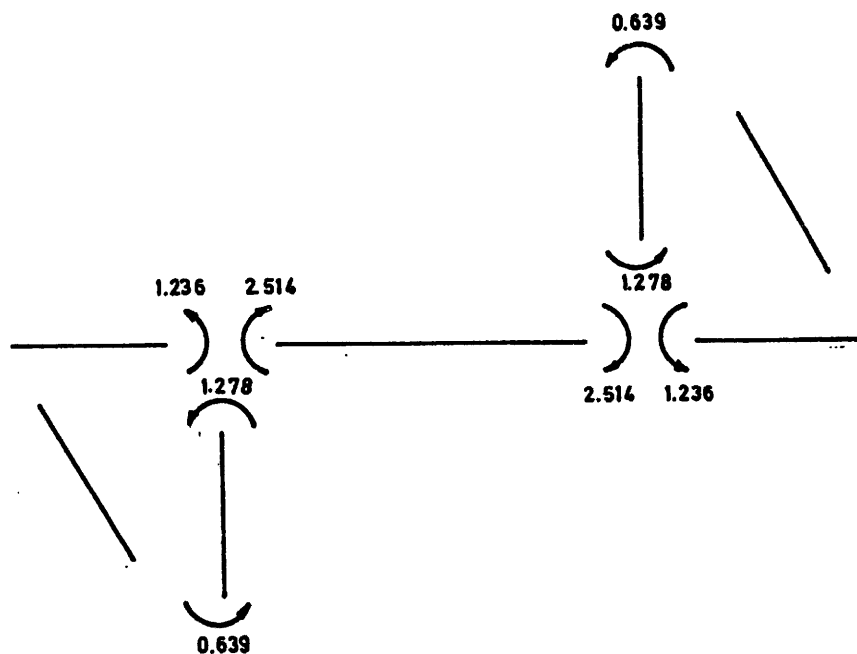

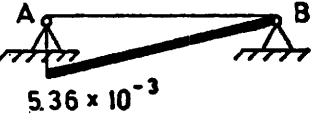

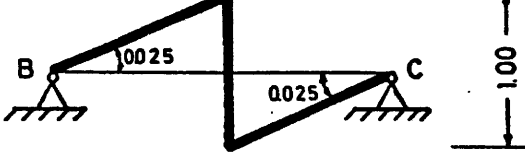
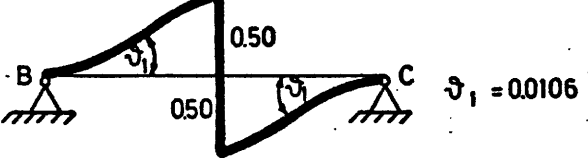


Fig. E20.2 q. - Estado (4) Hay que multiplicar los momentos por 10^4

La deformada del cordón ABHCD se calcula en la
tabla E20.2g.

Tabla E20.2g

Deformada de AB	Deformada de BC
 <p style="text-align: center;">+</p>  $V = \frac{1,236 \cdot 10^4}{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3} (15x - \frac{x^3}{15}) + 5,36 \cdot 10^{-3} (1 - \frac{x}{15})$ <p>$V_{\text{máx}}$ en $x=8,35$; $V_{\text{máx}} = 0,03205$</p> <p>$Q_{\text{máx}}^- = -3,205 \text{ t}$</p>	 <p style="text-align: center;">+</p>  <p>Giro en B: $v = \frac{2,514 \cdot 10^4}{174,55 \cdot 10^4} = 0,0144 < 0,025$ y la deformada es:</p>  <p>Cortante máximo en el centro:</p> <p>$Q_{\text{máx}}^+ = 50 \text{ t}; Q_{\text{máx}}^- = -50 \text{ t}$</p>

Ejercicio E20.3.

La estructura de la figura E20.3a, tiene las siguientes características:

1. Barras 0-1 y 2-3 sección constante e inextensibles. Inercia I , módulo de elasticidad E .

2. Barra 1-2 sección variable e inextensible. Sus características mecánicas pueden determinarse a partir de los datos siguientes:

- a) Supuesta empotrada en el extremo 1 y articulada en 2, con un momento M aplicado en el extremo articulado, el extremo 2 gira $\frac{28M}{27EI}$ y en el extremo 1 aparece un momento reacción, del mismo signo que el momento M y de valor $M/3$.
- b) Si se supone la barra 1-2 biempotrada y que sufre un movimiento relativo λ entre sus extremos, aparecen los siguientes momentos reacción,

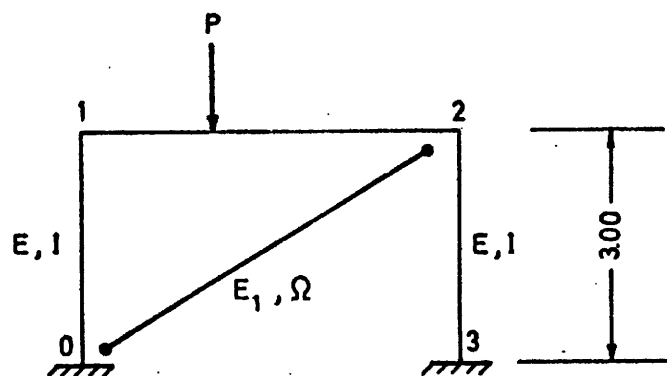
$$M_1 = (3/28)EI\lambda \quad M_2 = (9/28)EI\lambda$$

- c) Bajo la actuación de la carga P , y supuesta la viga 1-2 articulada en el extremo 1 y empotrada en 2 se obtiene giro en $1,9P/EI$ y momento en 2, $M = 3P$.

3. La barra 0-2 es extensible con área Ω y módulo de elasticidad E_1 .

Se pide:

- Características de la barra 1-2.
- Momentos empotramiento rígido en la barra 1-2.
- Momentos finales en extremos de barra.
- Movimiento del nudo 2.
- Esfuerzo en el tirante.



$$E = 2 \times 10^6 \text{ tm}^{-2}$$

$$E_1 = 2 \times 10^7 \text{ tm}^{-2}$$

$$I = 0.01 \text{ m}^4$$

$$\Omega = 5.00 \text{ cm}^2$$

$$P = 10 \text{ t.}$$

Fig. E20.3a

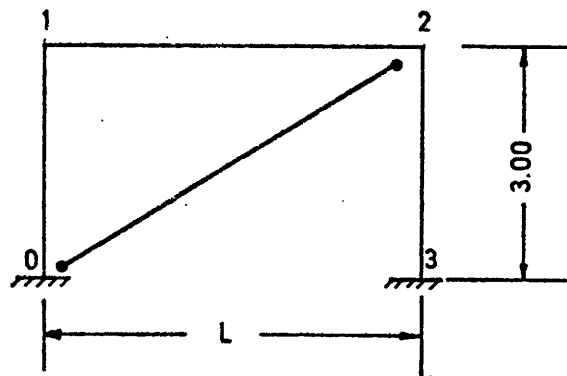


Fig. E 20.3 b

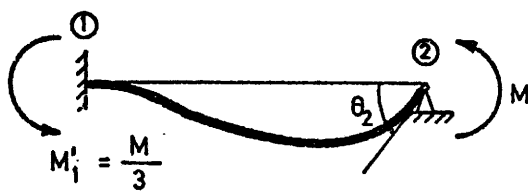


Fig. E20.3 c

$$R_2 = \frac{M}{\theta_2} = \frac{M}{\frac{28M}{27EI}} = \frac{27EI}{28}$$

$$\gamma_{21} = \frac{M'_1}{M_2} = \frac{M/3}{M} = \frac{1}{3}$$

$$R_2 = \frac{27EI}{28}; \quad \gamma_{21} = \frac{1}{3}$$

$$R_1 = K EI$$

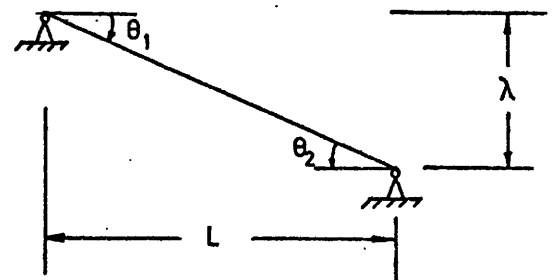
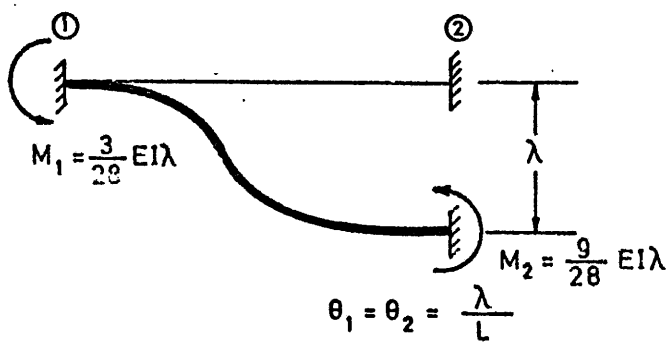


Fig. E 20.3 d

$$M_1 = \hat{M}_1 + R_1 \theta_1 + \gamma_{21} R_2 \theta_2; \frac{3}{28}EI\lambda = K EI \frac{\lambda}{L} + \frac{1}{3} \frac{27EI}{28} \frac{\lambda}{L}$$

$$M_2 = \hat{M}_2 + R_2 \theta_2 + \gamma_{12} R_1 \theta_1; \frac{9}{28}EI\lambda = \frac{27EI}{28} \frac{\lambda}{L} + \gamma_{12} K EI \frac{\lambda}{L}$$

$$\frac{3}{28} = \frac{1}{28L} \{28K + 9\} \rightarrow 3L = 28K + 9 ; \quad 9L = 27 + 3 \cdot 28K$$

$$\frac{9}{28} = \frac{1}{28L} \{27 + 28K \gamma_{12}\} \rightarrow 9L = \gamma_{12} 28K + 27; 9L = 27 + \gamma_{12} 28K$$

Luego:

$$\gamma_{12} = 3$$

Se sabe además que:

$$R_1 \gamma_{12} = R_2 \gamma_{21}$$

Por lo tanto:

$$R_1 \cdot 3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{27EI}{28} \rightarrow R_1 = \frac{3EI}{28} \quad R_1 = \frac{3EI}{28}$$

$$\text{De donde } K = \frac{3}{28} ; \text{ luego } 3L = \frac{3}{28} \cdot 28 + 9$$

$$L = 4 \text{ metros}$$

Para hallar los momentos de empotramiento rígido se considera la figura E20.3e:

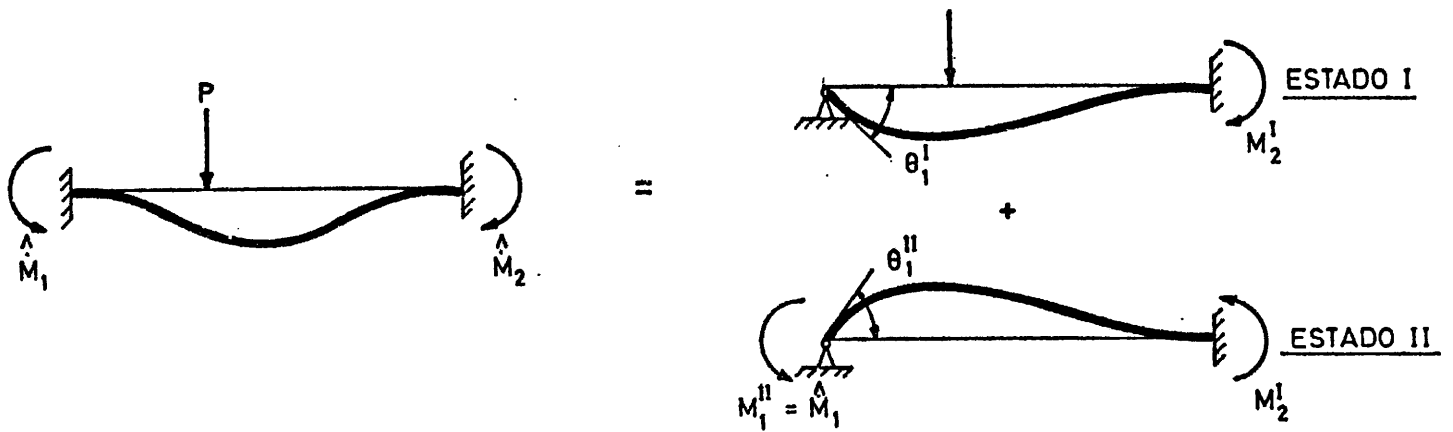


Fig. E 20. 3 e

$$M_1^I = 0 ; \quad \theta_1^I = -\frac{9P}{EI} ; \quad M_2^I = -3P ; \quad \theta_2^I = 0$$

$$M_1^{II} = \hat{M}_1 = R_1 \theta_1^{II} = \frac{3EI}{28} \theta_1^{II} ; \quad M_2^{II} = \gamma_{12} M_1^{II} = \frac{9EI}{28} \theta_1^{II} ; \quad \theta_2^{II} = 0$$

Entonces:

$$|\theta_1^{II}| = |\theta_1^I| = \frac{9P}{EI} \rightarrow \hat{M}_1 = \frac{27P}{28}$$

$$M_2^{II} = \gamma_{12} M_1^{II} = 3 \cdot \frac{27P}{28}$$

$$\hat{M}_2 = \frac{3 \cdot 27P}{28} - 3P = \frac{3 \cdot 27P - 3 \cdot 28P}{28} = \frac{-3P}{28}$$

$$\boxed{\hat{M}_1 = \frac{27P}{28}}$$

$$\boxed{\hat{M}_2 = \frac{-3P}{28}}$$

La resolución del Cross se efectúa suponiendo - primero que no hay tirante, luego lo consideraremos al establecer el equilibrio de cortantes. (Figura E20.3f):

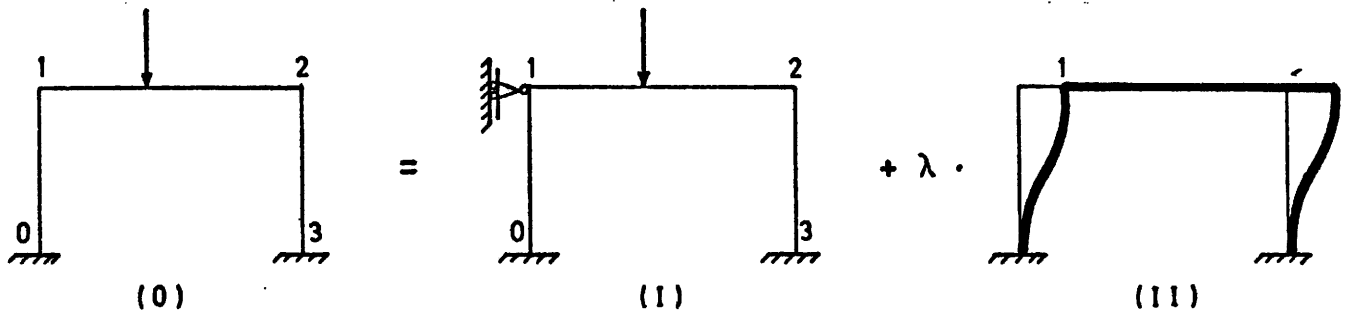


Fig. E 20.3f

Resolución del estado I:

Table E20.3a.

ESTADO I

NUDO	1		2	
BARRA	1-0	1-2	2-1	2-3
R	$\frac{4}{3}EI$	$\frac{3}{28}EI$	$\frac{27}{28}EI$	$\frac{4}{3}EI$
Y	0,5	3	1/3	0,5
K	0,926	0,074	0,42	0,58
\hat{M}	0	9,64	-1,07	0
M^I	-8,9	-0,71	0,45	0,62
M^{II}	0	0,15	-2,13	0
M^{III}	-0,14	-0,011	0,9	1,23
M^{IV}	0	0,3	-0,033	0
M^V	-0,28	-0,022	0,014	0,02
Σ	-9,34	9,34	-1,87	1,87

$$\hat{M}_{1-2} = \frac{27P}{28} ; \quad \hat{M}_{2-1} = \frac{-3P}{28}$$

$$\text{Para } P = 10 \quad \begin{cases} \hat{M}_{1-2} = 9,64 \\ \hat{M}_{2-1} = -1,07 \end{cases}$$

$$M_{0-1} = (M_{1-0} - \hat{M}_{1-0})\gamma_{1-2} + \hat{M}_{0-1}$$

$$M_{0-1} = (-9,34 - 0)0,5 + 0 = -4,67$$

$$M_{0-1} = -4,67$$

$$M_{3-2} = (M_{2-3} - \hat{M}_{2-3})\gamma_{2-3} + \hat{M}_{3-2}$$

$$M_{3-2} = (1,87 - 0)0,5 + 0 = 0,935$$

$$M_{3-2} = 0,935$$

Resolución: del estado II;

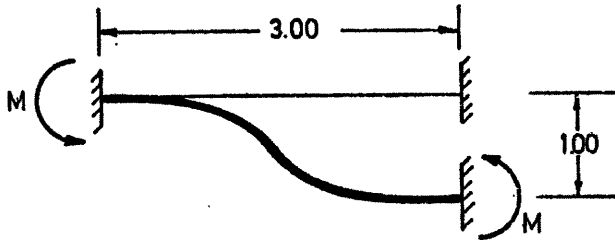


Fig. E 20.3 g

$$M = \frac{6EI}{L^2} = \frac{6EI}{9} = \frac{2}{3} EI$$

$$\hat{M}_{0-1} = \frac{2}{3} EI ; \quad \hat{M}_{1-0} = \frac{2}{3} EI$$

$$\hat{M}_{2-3} = \frac{2}{3} EI ; \quad \hat{M}_{3-2} = \frac{2}{3} EI$$

Se supone $M = 100$ y luego se multiplica por:

$$\frac{\frac{2}{3} EI}{100} = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0,01 = 10^{-2} = \frac{4}{3} 100 = \frac{400}{3}$$

Tabla E20.3b.

ESTADO 1

NUDO	1		2	
BARRA	1-0	1-2	2-1	2-3
γ	0,5	3	1/3	0,5
K	0,962	0,074	0,42	0,58
\hat{M}	100	0	0	100
M^I	-92,6	-7,4	-42	-58
M^{II}	0	-14	-22,2	0
M^{III}	12,96	1,04	9,32	12,88
M^{IV}	0	3,11	3,12	0
M^V	-2,88	-0,23	-1,31	-1,81
Σ	17,48	-17,48	-53,07	53,07
$\times \frac{400}{3}$	2330,67	-2330,67	-7076	7076

$$M_{0-1} = (M_{1-0} - \hat{M}_{10}) \gamma_{10} + \hat{M}_{0-1}$$

$$M_{0-1} = (14,48 - 100) 0,5 + 100 = 57,24$$

$$\times \frac{400}{3} \rightarrow M_{0-1} = 7632$$

$$M_{3-2} = (53,07 - 100) 0,5 + 100 = 76,535$$

$$\times \frac{400}{3} \rightarrow M_{3-2} = 10204,67$$

Los cortantes del estado (I) se indican en la figura E20.3h:

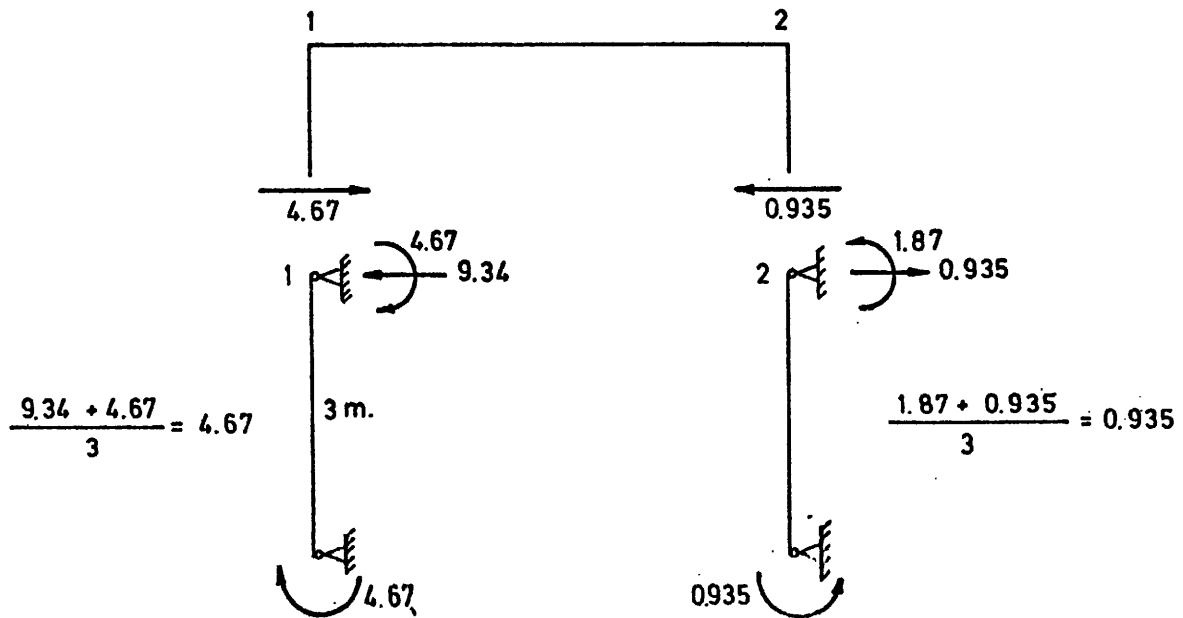


Fig. E 20.3 h

Los cortantes del estado II se dan en la figura E20.3i:

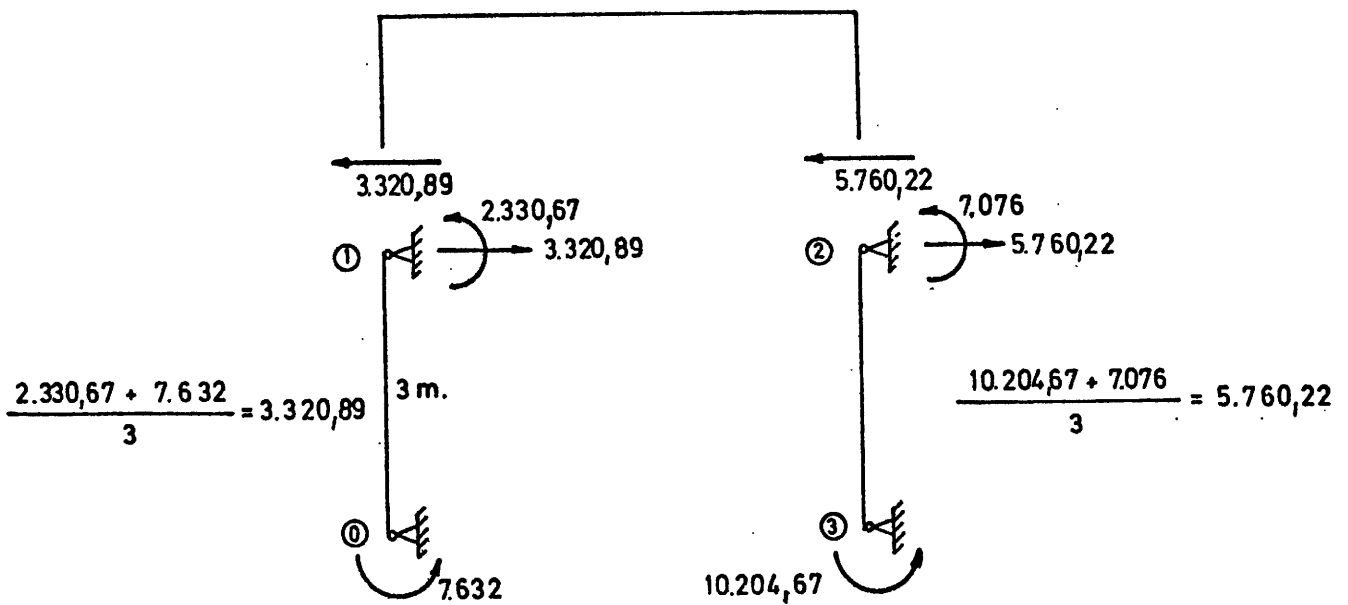


Fig. E 20.3 i

La tensión en el tirante es (figura E20.3j):

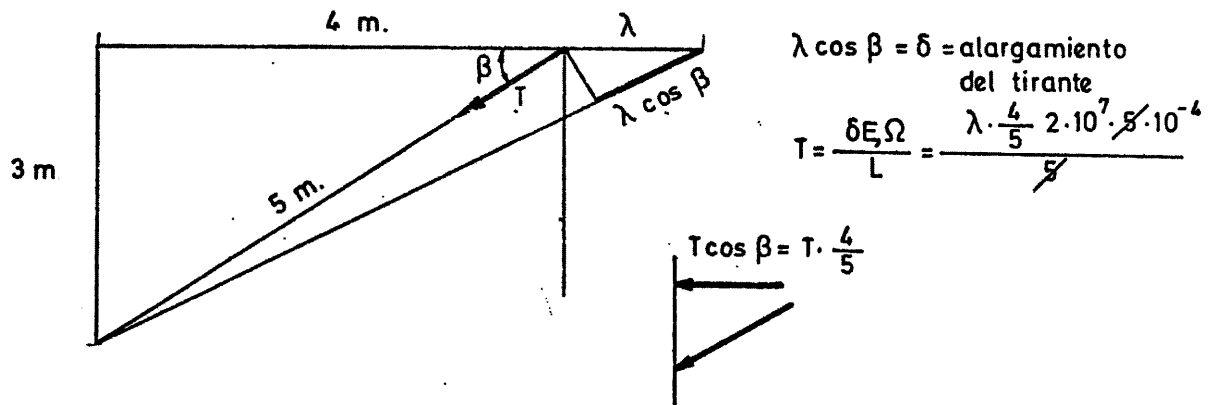


Fig. E20.3j

Efectuando el corte indicado en las figs. E20.3h y E20.3i. resulta, al plantear el equilibrio de fuerzas horizontales:

$$4,67 - 0,935 - \lambda \{3320,89 + 5760,22 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 2 \cdot 10^3\} = 0$$

$$3,735 = 10361,11\lambda \rightarrow \boxed{\lambda = 0,00036}$$

Movimiento del nudo 2: 0,00036 metros.

Esfuerzo en el tirante: $T = \frac{8}{5} 10^3 \lambda$; $T = 0,576 \text{ Ton.}$

Los momentos que nos quedan son:

$$M_0 + \lambda M_I$$

Resultados:

$$M_{0-1} = -1,92 \text{ mxt}$$

$$M_{1-2} = 8,5 \text{ mxt}$$

$$M_{2-3} = 4,42 \text{ mxt}$$

$$M_{1-0} = -8,5 \text{ mxt}$$

$$M_{2-1} = -4,42 \text{ mxt}$$

$$M_{3-2} = 4,61 \text{ mxt}$$

Ejercicio E20.4.

Determinar la línea de influencia del momento flector en la sección A de la estructura reticular indicada en la figura E20.4a.

El dintel 1-2-3-4 es de sección constante de inercia I . Los soportes 2-5 y 3-6 son de inercia variable linealmente desde I en los nudos 2 y 3 a la inercia $I = k.I$, en los nudos 5 y 6. El módulo de elasticidad E_b es igual en todas las barras. Existe un tirante (3-5), de área Ω y módulo de elasticidad E_a .

La sustentación de la estructura en los nudos 5 y 6 es elástica, suponiéndose que un momento M_0 aplicado a la cimentación de cada uno de ellos produce un giro θ_0 .

DATOS NUMERICOS:

$$l = 12 \text{ m.}$$

$$\lambda = 0,75$$

Sección del dintel: Canto 1.00 - Ancho 0.50 m.

$$k = 2$$

$$E_b = 300,000 \cdot \text{kg} \cdot \text{cm}^{-2}$$

$$E_a = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

$$\Omega = 100 \text{ cm}^2.$$

$$M_0 = 100 \text{ m.t}$$

$$\theta_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ radianes.}$$

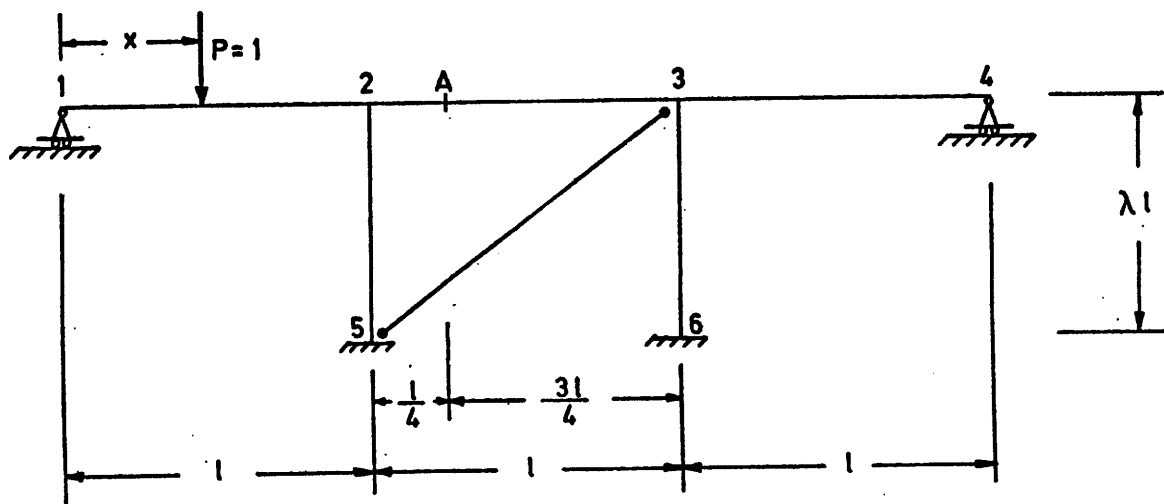


Fig. E20.4a

Las características elastomecánicas de las barras 2-5 y 3-6 son:

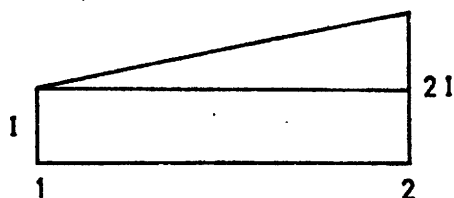


Fig. E20.4 a

$$I(x) = I + \frac{I}{L} x = I(1 + \frac{x}{L})$$

$$f_{ij} = \frac{1}{EI} \int_0^L \frac{g_{ij}(x)}{(1 + \frac{x}{L})} dx \quad \begin{cases} 1 + \frac{x}{L} = z; \quad dx = Ldz \\ x=0 \rightarrow z = 1 \\ x=L \rightarrow z = 2 \end{cases}$$

$$g_{11} = (1 - \frac{x}{L})^2; \quad g_{12} = \frac{x}{L}(1 - \frac{x}{L}); \quad g_{22} = (\frac{x}{L})^2$$

$$f_{11} = \frac{L}{EI} \int_1^2 \frac{(2-z)^2}{z} dz = \frac{L}{EI} \{ \int_1^2 \frac{4}{z} dz - \int_1^2 4 dz + \int_1^2 z dz \} =$$

$$= \frac{L}{EI} (4 \log 2 - 4 + \frac{3}{2}); \quad f_{11} = \frac{L}{EI} (4 \log 2 - \frac{5}{2})$$

$$f_{12} = \frac{L}{EI} \int_1^2 \frac{(z-1)(2-z)}{z} dz = \frac{L}{EI} \int_1^2 (3-z - \frac{2}{z}) dz = \frac{L}{EI} (3 - \frac{3}{2} - 2 \log 2)$$

$$f_{12} = \frac{L}{EI} (\frac{3}{2} - 2 \log 2)$$

$$f_{22} = \frac{L}{EI} \int_1^2 \frac{(z-1)^2}{z} dz = \frac{L}{EI} \int_1^2 (z-2 + \frac{1}{z}) dz = \frac{L}{EI} (\frac{3}{2} - 2 + \log 2);$$

$$f_{22} = \frac{L}{EI} (\log 2 - \frac{1}{2})$$

Sustituyendo:

$$E = 3 \cdot 10^6; \quad I = \frac{1}{12} 0,5; \quad L = \lambda l = 0,75 \cdot 12 = 9,$$

resulta: $\frac{L}{EI} = 72 \cdot 10^{-6}$

$f_{11} = 19,626 \cdot 10^{-6}$; $f_{12} = 8,187 \cdot 10^{-6}$; $f_{22} = 13,907 \cdot 10^{-6}$

Considerando el apoyo elástico se tiene (figura E20.4c.):

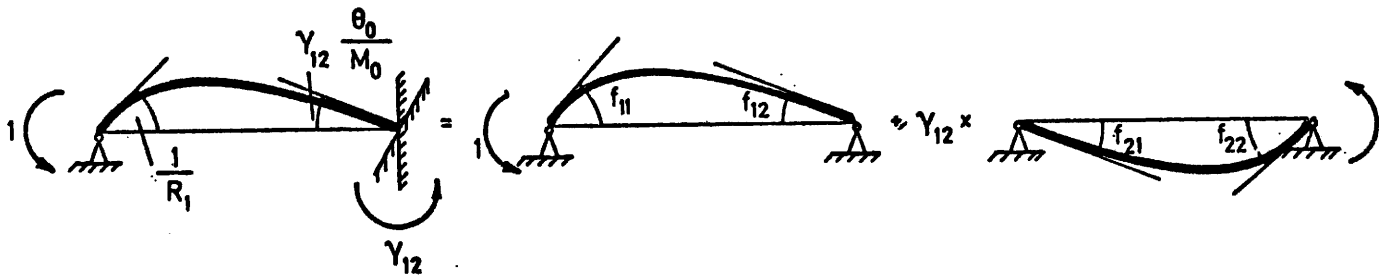


Fig. E 20.4 c

$$\frac{1}{R_1} = f_{11} - \gamma_{12} f_{21} \quad \frac{1}{R_1} = 19,626 \cdot 10^{-6} - \gamma_{12} \cdot 8,187 \cdot 10^{-6}$$

$$\gamma_{12} \frac{\theta_0}{M_0} = f_{12} - \gamma_{12} f_{22}; \quad \gamma_{12} \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 8,187 \cdot 10^{-6} - \gamma_{12} \cdot 13,907 \cdot 10^{-6}$$

$$\gamma_{12} = 0,128$$

$$R_1 = 53827$$

$$R_2 = \frac{f_{11}}{f_{11} f_{22} - (f_{12})^2} = \frac{19,626}{205,912} 10^6 = 95313;$$

$$\gamma_{21} = \frac{f_{21}}{f_{11}}$$

$$R_2 = 95313$$

$$\gamma_{21} = 0,417$$

Las características de las restantes barras son:

$$R_{21} = R_{34} = \frac{3EI}{12} = \frac{3 \cdot 10^6 \frac{1}{12} 0,5}{4} = \frac{10^6}{32} = 31250 ;$$

$$R_{23} = R_{32} = \frac{4EI}{12} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3EI}{12} = \frac{4}{3} 31250 = 41667$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{32} = \frac{1}{2}$$

La línea de influencia pedida se obtiene como suma de las deformadas de los dos estados de la figura E20.4d:

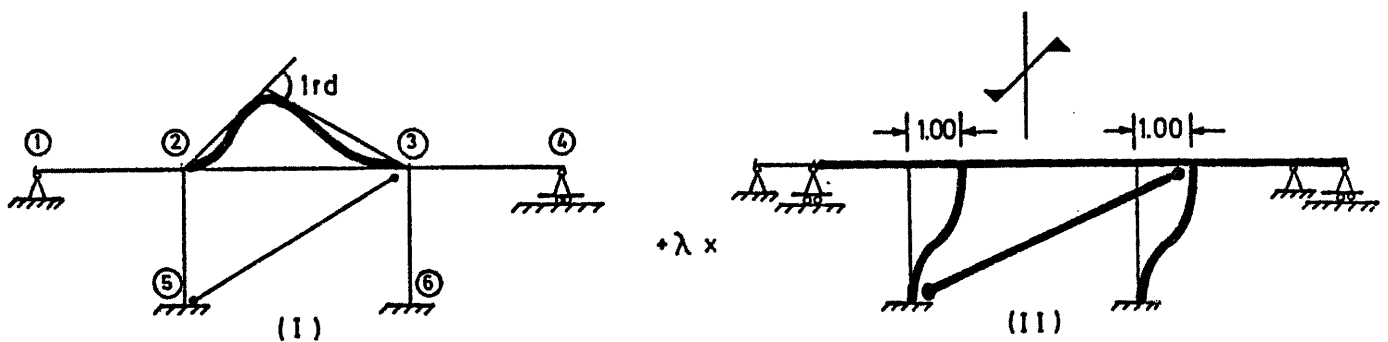


Fig. E20.4d

Los momentos de empotramiento rígido son (figura E20.4e.):

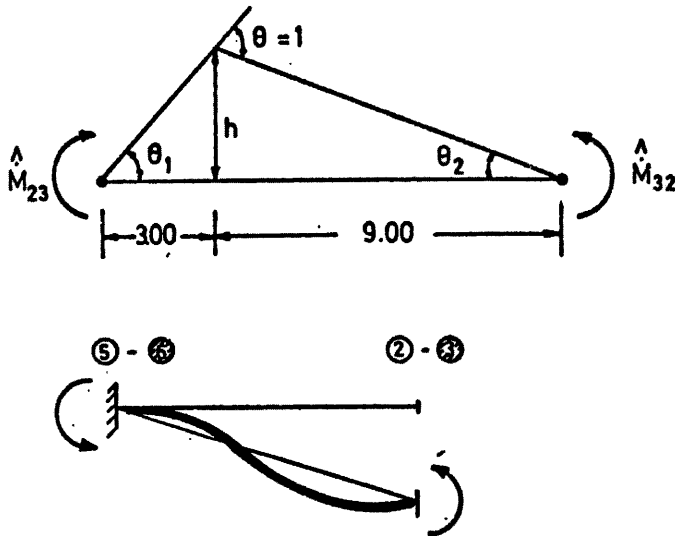


Fig. E20.4e

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{h}{3} + \frac{h}{9} = 1;$$

$$h\left(\frac{3}{9} + \frac{1}{9}\right) = 1; \quad h = \frac{9}{4}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{4} = 0,75$$

$$\theta_2 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\hat{M}_{23} = R_1(-\theta_1) + \gamma_{21} R_2 \theta_2 =$$

$$= 41667(-0,75 + \frac{0,25}{2}) =$$

$$= \underline{\underline{-26042}}$$

$$\hat{M}_{32} = R_2 \theta_2 + \gamma_{12} R_1 (-\theta_1) = 41667(0,25 - \frac{0,75}{2}) = \underline{\underline{-5208}}$$

$$\hat{M}_{25}^I = \hat{M}_{36}^I = (R_1 + \gamma_{21} R_2) \frac{1}{9} = (53827 + 0,417 \cdot 95313) \frac{1}{9} = \underline{\underline{10397}}$$

$$\hat{M}_{52}^I = \hat{M}_{63}^I = (R_2 + \gamma_{12} R_1) \frac{1}{9} = (95513 + 0,128 \cdot 53827) \frac{1}{9} = \underline{\underline{11356}}$$

La resolución de los Cross se hace en las tablas
E20.4a. y E20.4b.

Tabla E20.4a.

ESTADO (I)

NUDO	2			3		
BARRA	2-1	2-5	2-3	3-2	3-6	3-4
R	3125	53827	41667	41667	53827	31250
K	0,25	0,42	0,33	0,33	0,42	0,25
M	0	0	-26042	-5208	0	0
R ^I	6510,5	10937,6	8593,9	1718,6	1287,4	1032
T ^I	0	0	859,3	4297	0	0
R ^{II}	-214,8	-360,9	-283,6	-1418	-1804,7	-1074,3
T ^{II}	0	0	-709	-141,8	0	0
R ^{III}	177,3	297,8	234	46,8	59,6	35,4
Σ	6473	10874,5	-17347,5	-705,4	442,3	263,1

$$\underline{\underline{M_{52}}} = 0,128 \cdot 10874,5 = \underline{\underline{1392}}$$

$$\underline{\underline{M_{63}}} = 0,128 \cdot 442,3 = \underline{\underline{56,6}}$$

$Q_{25}^{\circ} = - \frac{M_{25} + M_{52}}{9} = - 1362,94$ $Q_{36}^{\circ} = - \frac{M_{36} + M_{63}}{9} = -55,43$
--

Tabla E20.4b.

ESTADO (II)			
NUDO	2		
BARRA	2-1	2-5	2-3
R	31250	53827	62500
K	0,21	0,37	0,42
\hat{M}	0	10397	0
R^I	-2183,4	-3846,9	-4366,7
Σ	-2183,4	6550,1	-4366,7

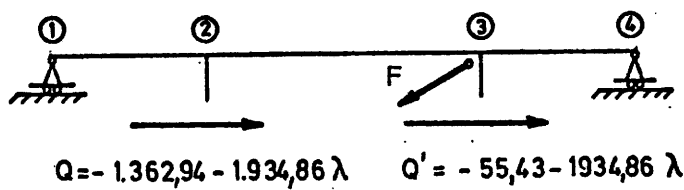
$$R_{2-3}^4 = R(1+\gamma) = 1,5 \cdot 41667 = 62500$$

$$\underline{\underline{M_{52}}} = (6550,1 - 10397) 0,128 + 11356 = \underline{\underline{10863,6}}$$

$$Q_{25}^I = Q_{36}^I = - \frac{M_{25} + M_{52}}{9} = -1934,86$$

El equilibrio de cortantes se ve en la figura

E20.4f:



$$F = \frac{E_a \Omega}{L_a} \cdot \cos \alpha \cdot \lambda$$

$$F = \frac{2 \cdot 1 \times 10^5}{15} \cdot \frac{12}{15} \cdot \lambda = 0.112 \cdot 10^5 \lambda$$

Fig. E20. 4 f

$$Q + Q' - F \cos \alpha = 0; \quad -1362,94 - 55,43 - 2 \cdot 1934,86\lambda - 8960\lambda = 0;$$

$$\lambda = -0,11055$$

Los momentos finales en extremos de barra del dintel son:

$$M_{21} = 6714,37; \quad M_{23} = -16864,76; \quad M_{32} = -222,66; \quad M_{34} = 504,47$$

Las deformadas se indican en la figura E20.4g:

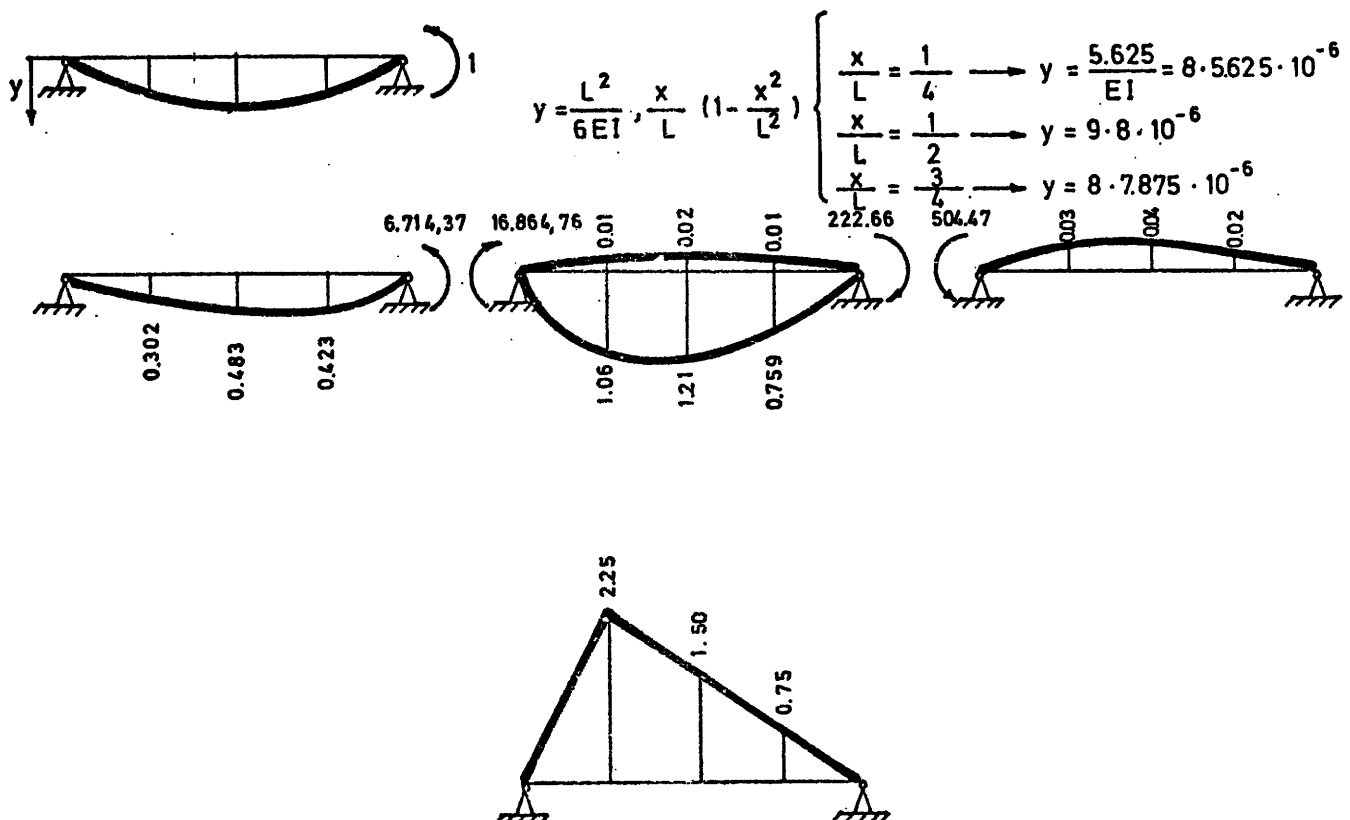
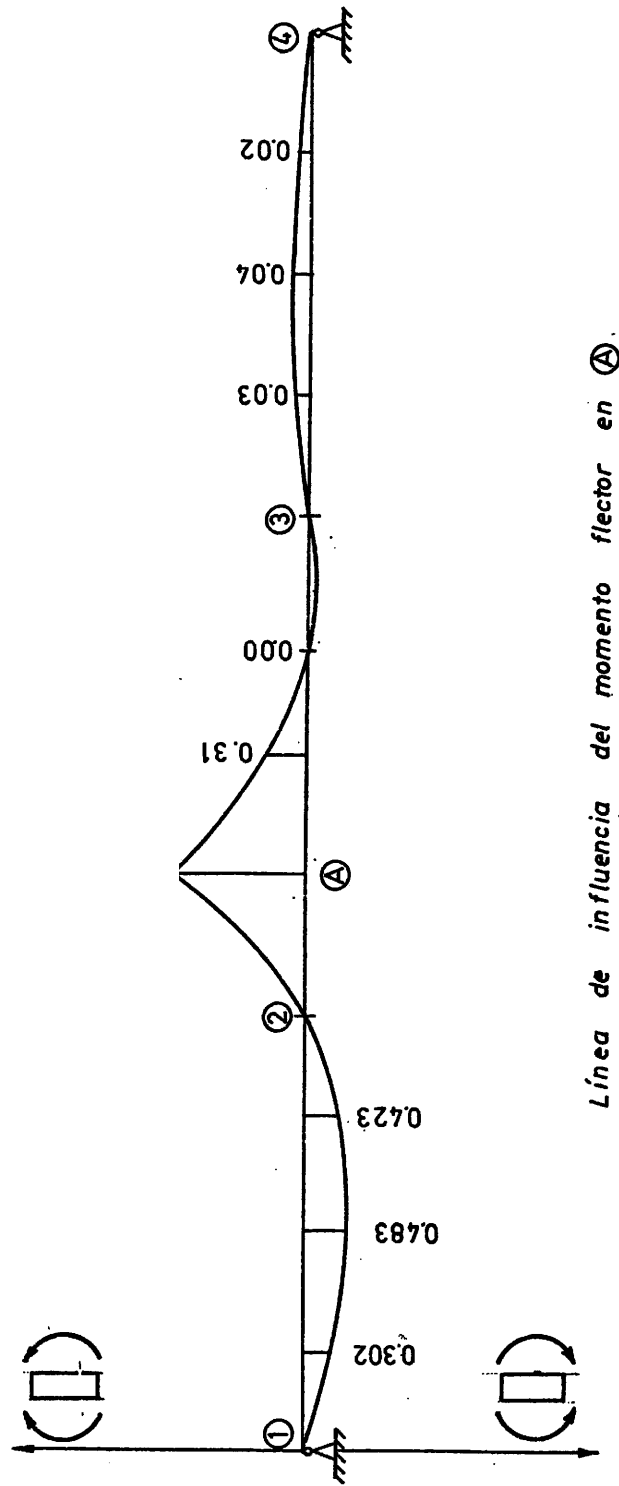


Fig. E20.4g

La línea de influencia pedida es la de la figura

E20.4h:



Línea de influencia del momento flector en A

Fig. E20. 4 h

Ejercicio E21.1.

En la estructura reticulada de la figura E21.1a, constituida por un exágono regular de lado 8 m, se pide determinar el movimiento relativo entre los nudos A y D.

Las barras AB, CD y B'C' son infinitamente rígidas a flexión y a elongación.

Las barras AB', BC y C'D son flexibles y elongables, con las siguientes características:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2.$$

$$I = 0,02 \text{ m}^4.$$

$$A = 0,25 \text{ m}^2 \text{ (área).}$$

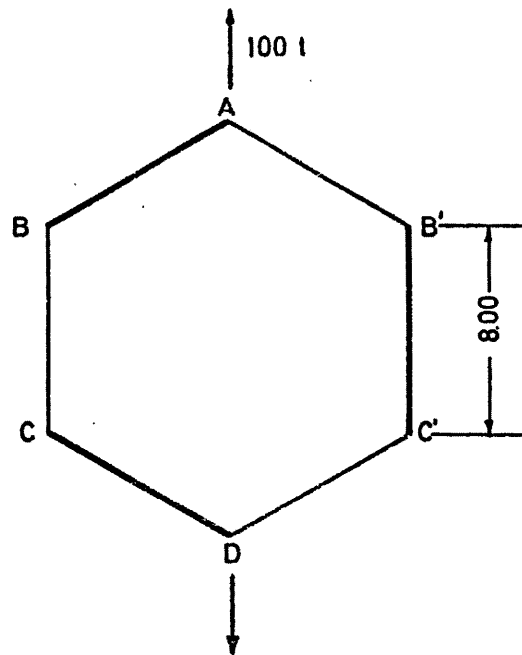
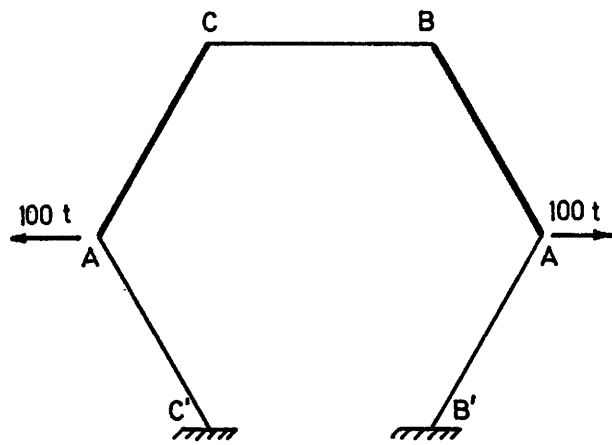
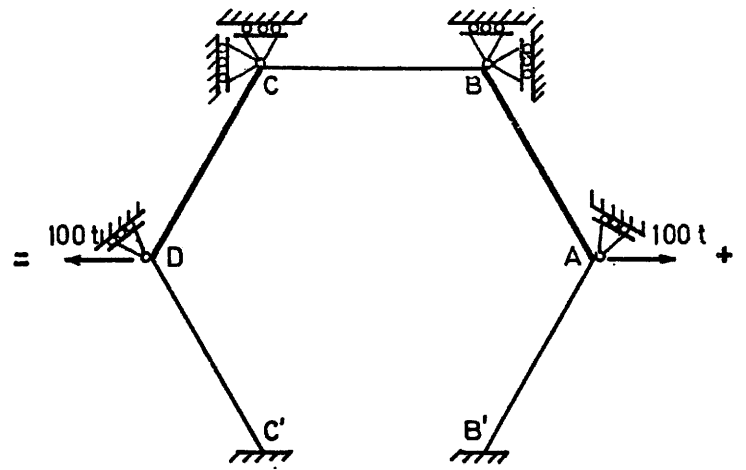


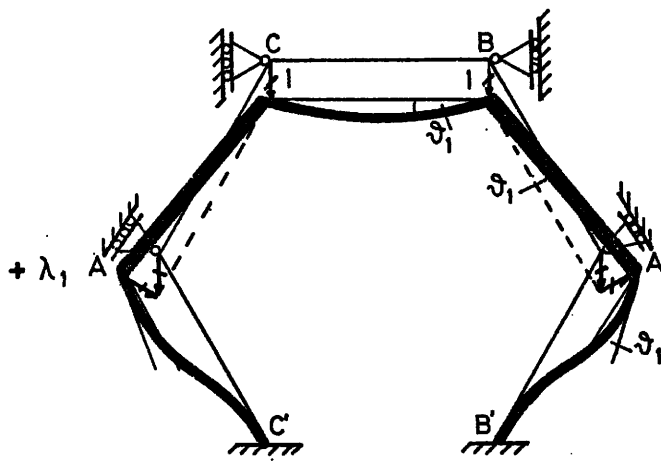
Fig. E 21. 1a



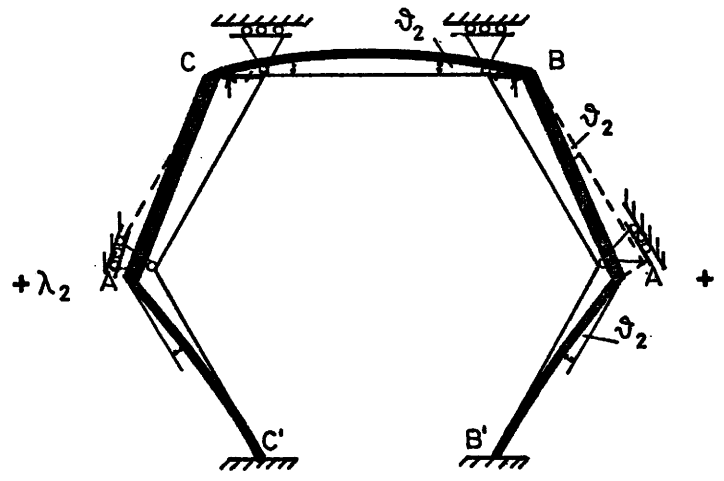
estado (0)



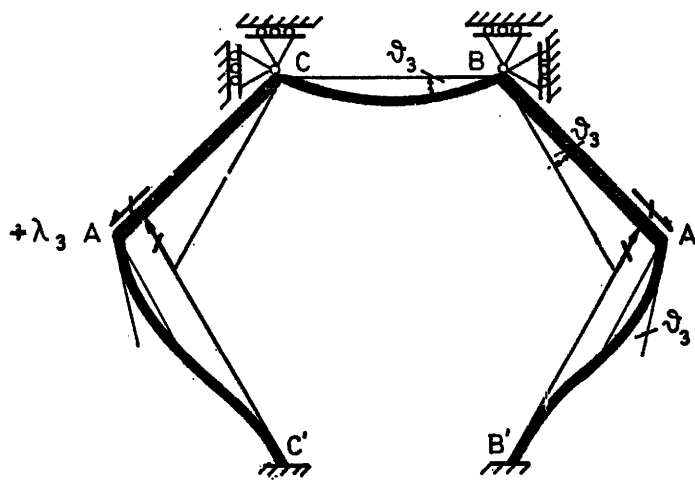
estado (1)



estado (2); $\delta_1 = \frac{1}{8}$



estado (3); $\delta_2 = \frac{1}{8\sqrt{3}}$



estado (4); $\delta_3 = \frac{2}{8\sqrt{3}}$

Fig. E 21.1 b

Dada la simetría, a efectos de esfuerzos y movimientos relativos se puede considerar la estructura de la figura E21.1b descompuesta en los estados allí indicados.

Los axiles en los estados (3) y (4) son:

$$N_{AB'}^{III} = N_{DC'}^{III} = 0$$

$$N_{BC}^{III} = 2 \lambda_2 \left(\frac{E\Omega}{L} \right)_{BC}$$

$$N_{AB'}^{IV} = N_{DC'}^{IV} = \lambda_3 \left(\frac{E\Omega}{L} \right)_{AB'}$$

$$N_{BC}^{IV} = 0$$

El movimiento relativo entre los nudos A y D será:

$$\Delta_{AD} = 2 \lambda_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \lambda_2 \frac{1}{2} + 2 \lambda_3 ; \quad \Delta_{AD} = \sqrt{3} \lambda_1 + \lambda_2 + 2 \lambda_3$$

$$EI = 4 \cdot 10^4 \text{ t.m}^2; \quad E\Omega = 50 \cdot 10^4 \text{ t}$$

Los extremos finales en momentos de barra son:

$$\begin{aligned} M_{BC} = -M_{CB} &= \frac{2EI}{L} (\theta_1 - \theta_2 + \theta_3) = 10^4 \left(\frac{1}{8} \lambda_1 - \frac{1}{8\sqrt{3}} \lambda_2 + \frac{2}{8\sqrt{3}} \lambda_3 \right) = \\ &= (0,125 \lambda_1 - 0,07217 \lambda_2 + 0,14434 \lambda_3) \cdot 10^4 \end{aligned}$$

$$M_{BA} = M_{BC} = -M_{CB} = -M_{CD}$$

$$\begin{aligned} M_{AB'} = -M_{DC'} = -M_{AB} = -M_{DC} &= \frac{6EI}{L^2} \lambda_1 + \frac{4EI}{L} \theta_1 + \frac{6EI}{L^2} \frac{\lambda_2}{\sqrt{3}} - \frac{4EI}{L} \theta_2 + \\ &+ \frac{6EI}{L^2} \frac{\lambda_3}{\sqrt{3}} + \frac{4EI}{L} \theta_3 = (0,375 \lambda_1 + 0,25 \lambda_1 + 0,2615 \lambda_2 - \\ &- 0,14434 \lambda_2 + 0,2165 \lambda_3 + 0,28868 \lambda_3) 10^4 = (0,625 \lambda_1 + \\ &+ 0,07216 \lambda_2 + 0,50518 \lambda_3) 10^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{B'A} = -M_{C'D} &= (0,375 \lambda_1 + 0,125 \lambda_1 + 0,2165 \lambda_2 - 0,07217 \lambda_2 + \\ &+ 0,2165 \lambda_3 + 0,14434 \lambda_3) 10^4 = (0,50 \lambda_1 + 0,14434 \lambda_2 + \\ &+ 0,36084 \lambda_3) 10^4 \end{aligned}$$

y los axiles son:

$$N_{BC} = 12,5 \lambda_2 \cdot 10^4 ; \quad N_{AB'} = N_{BC'} = 6,25 \lambda_3 \cdot 10^4$$

Para hallar los parámetros λ_1 , λ_2 y λ_3 se efectúan los equilibrios de nudo B y A (figuras E21.1c y E21.1d) y el equilibrio de la barra AB (figura E21.1e).

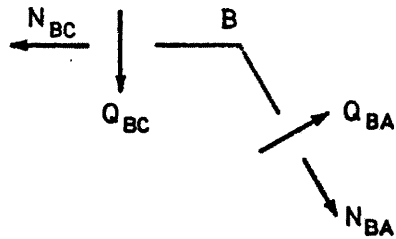


Fig. E 21.1c

$$Q_{BA} - Q_{BC} \cdot \cos 60^\circ - N_{BC} \sin 60^\circ = 0$$

$$-\frac{1}{8}(-0,50 \lambda_1 - 0,14434 \lambda_2 - 0,36084 \lambda_3) + 0 - 12,5 \lambda_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$0,0625 \lambda_1 + 0,01804 \lambda_2 + 0,045105 \lambda_3 - 10,82532 \lambda_2 = 0$$

$$0,0625 \lambda_1 - 10,8073 \lambda_2 + 0,045015 \lambda_3 = 0 \quad (1)$$

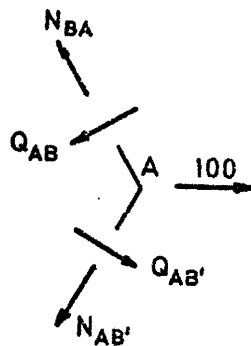


Fig. E 21.1d

$$Q_{AB} - Q_{AB'} \cdot \cos 60 + N_{AB'} \cdot \sin 60 - 100 \sin 60 = 0$$

$$- \frac{1}{8}(0,50 \lambda_1 + 0,14434 \lambda_2 + 0,36084 \lambda_3) +$$

$$+ \frac{1}{8}(1,125 \lambda_1 + 0,21651 \lambda_2 + 0,86602 \lambda_3) \frac{1}{2} + 5,41266 \lambda_3 -$$

$$- 86,6025 \cdot 10^{-4} = 0$$

$$0,13281 \lambda_1 + 0,03157 \lambda_2 + 5,51189 \lambda_3 - 86,6025 \cdot 10^{-4} = 0 \quad (2)$$

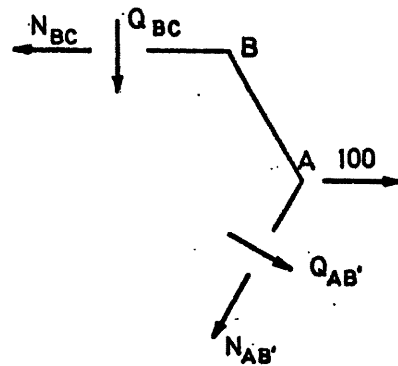


Fig. E21.1e

$$N_{BC} + N_{AB'} \cos 60 - Q_{AB'} \sin 60 - 100 = 0$$

$$12,5 \lambda_2 + 3,125 \lambda_3 + 0,12179 \lambda_1 + 0,02344 \lambda_2 + 0,09375 \lambda_3 -$$

$$- 100 \cdot 10^{-4} = 0$$

$$0,12179 \lambda_1 + 12,52344 \lambda_2 + 3,21875 \lambda_3 - 100 \cdot 10^{-4} = 0 \quad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por (1), (2) y (3) se obtiene:

$$\lambda_1 = 42,160 \cdot 10^{-3} \text{ m.} ; \lambda_2 = 0,246 \cdot 10^{-3} \text{ m.}; \lambda_3 = 0,554 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

Con lo que resulta:

$$\Delta_{AD} = 74,377 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

Ejercicio E22.1.

La estructura reticulada 1-2-3-4-5-6 de la figura E22.1a, constituye un paso superior sobre carretera, que debe ser reforzado mediante la estructura articulada A B C D.

Con objeto de comprobar este refuerzo se pide determinar el esfuerzo axial en la barra BC cuando una carga vertical de 60 t. recorre el dintel 1-2-4-5. Se calcularán estos valores del esfuerzo para posiciones de la carga cada 5,00 m a partir del nudo 1.

Las características de las barras son:

Barras 1-2, 2-4 y 4-5: Canto = 2,00 m; ancho = 3,00 m

Barras 2-3 y 4-6 : Canto = 1,00 m; ancho = 3,00 m

Módulo de elasticidad de la estructura reticulada:

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$$

En todas las barras de la estructura articulada se supone que sus características cumplen la condición

$$\frac{EI}{L} = 4 \cdot 10^5 \text{ t/m}$$

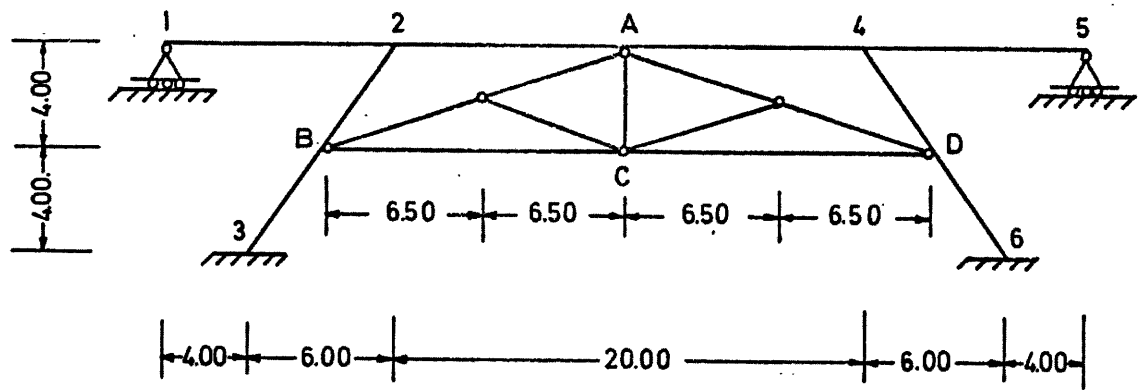
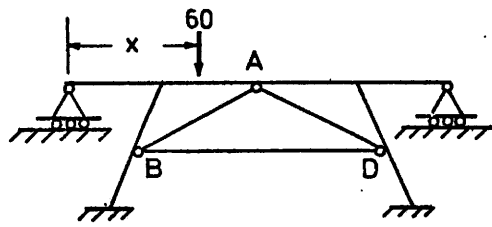
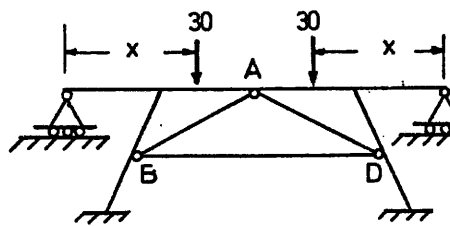


Fig. E22.1a



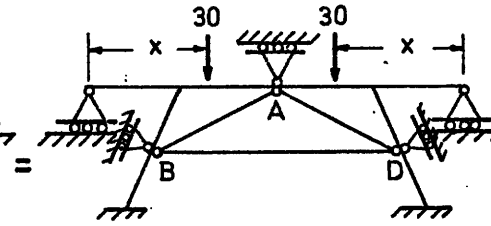
estado (0)

=

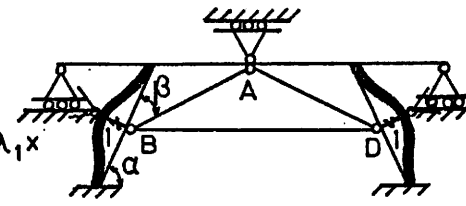


Simétrico
(intraslacional)

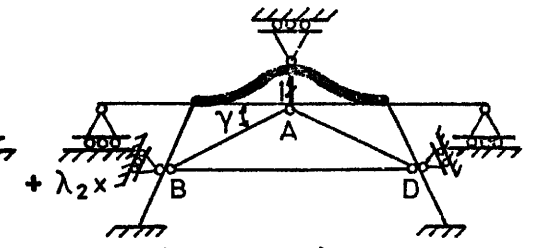
estado (1)



estado (1')

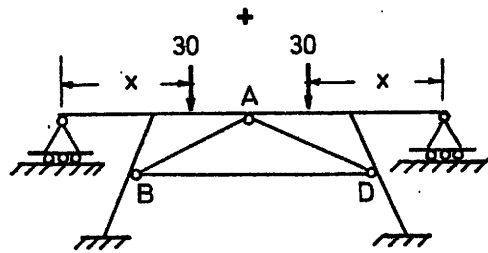


estado (1'')



estado (1''')

$$\Delta_{AB} = \Delta_{BD} = \lambda_2 \sin \gamma$$



Antimétrico
(no produce esfuerzo en BD)

estado (2)

Fig. E22.1b

Se consideran los estados de la figura E22.1b.

El estado (1') se puede reducir por simetría al indicado en la figura E22.1c.

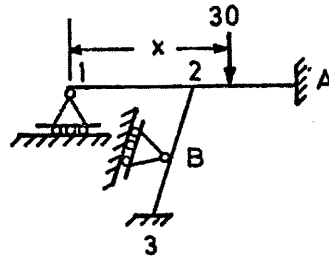


Fig. E22.1c

Las rigideces de las barras de la estructura de la figura E22.1c son:

$$R_{21} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \frac{1}{12} 3 \cdot 2^3}{10} = 1,2 \cdot 10^6$$

$$R_{2A} = \frac{4}{3} R_{21} = 1,6 \cdot 10^6$$

$$R_B = R_{2B} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^6 \frac{1}{12} 3 \cdot 1^3}{5} = 0,4 \cdot 10^6 =$$

$$= R_{B2} = R_{B3}$$

Aplicando un momento 100 en el nudo 2 se tiene el Cross de la tabla E22.1a, cuyos momentos en extremos de barra se representan en la figura E22.1d.

Tabla E22.1a. Cross del estado con un momento 100 en el nudo 2

NUDO	A			B	
BARRA	2-1	2 A	2 B	B 2	B 3
γ		0,5	0,5	0,5	0,5
R	$1,2 \cdot 10^6$	$1,6 \cdot 10^6$	$0,4 \cdot 10^6$	$0,4 \cdot 10^6$	$0,4 \cdot 10^6$
K	0,375	0,50	0,125	0,500	0,500
MOMENTO EXTERIOR	100			0,00	
M^I	-37,500	-50,000	-12,500	0,000	0,000
M^{II}	0,000	0,000	0,000	-6,250	0,000
M^{III}	0,000	0,000	0,000	3,125	3,125
M^{IV}	0,000	0,000	1,560	0,000	0,000
M^V	-0,585	-0,780	-0,195	0,000	0,000
Σ	-38,085	-50,780	-11,135	-3,125	3,125

$$M_{3B} = 1,562$$

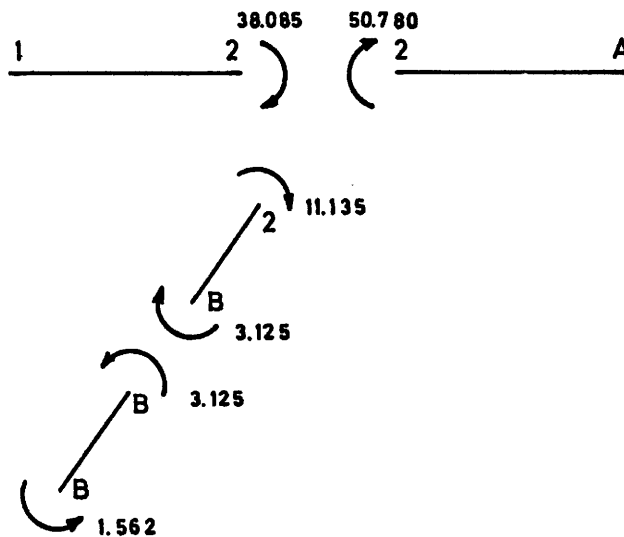


Fig. E22.1 d

El estado (1") queda reducido al de la figura E22.1e.

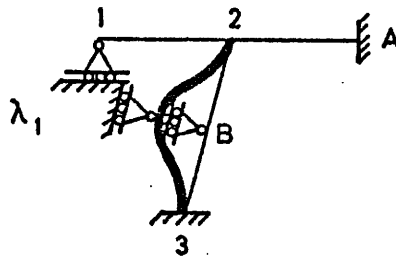


Fig. E 22. 1e

Los momentos de empotramiento son:

$$\hat{M}_{2B} = \hat{M}_{B2} = -\hat{M}_{B3} = \frac{6EI}{L^2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 1^3}{25} =$$
$$= 12 \cdot 10^4 \text{ m. t}$$

La resolución del Cross se hace en la tabla - E22.1b y los momentos en extremos de barra se representan en la figura E22.1f.

Tabla E22.1b.

NUDO	2		B		
BARRA	2-1	2 A	2 B	B 2	B 3
γ		0,5	0,5	0,5	0,5
R	$1,2 \cdot 10^6$	$1,6 \cdot 10^6$	$0,4 \cdot 10^6$	$0,4 \cdot 10^6$	$0,4 \cdot 10^6$
K	0,0375	0,50	0,125	0,500	0,500
\hat{M}	0,000	0,000	12,000	12,000	-12,000
M^I	-4,500	-6,000	-1,500	0,000	0,000
M^{II}	0,000	0,000	0,000	0,750	0,000
M^{III}	0,000	0,000	0,000	0,375	0,375
Σ	-4,500	-6,000	10,50	11,625	-11,625

$$M_{3B} = -12 + \frac{1}{2} (-11,625 + 12) = -11,813$$

$$\Delta_{BD} = 2\lambda_1 \text{ sen}\alpha; \quad \Delta_{AB} = \Delta_{AB} = \lambda_1 \text{ sen}\beta$$

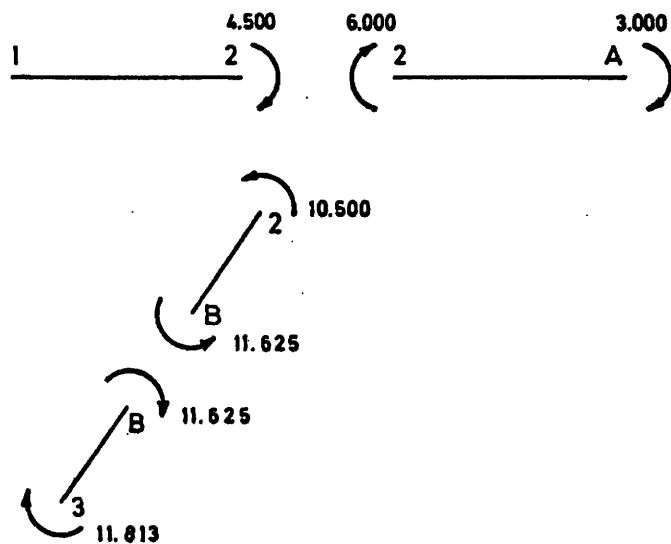


Fig. E22.1f. - Los momentos hay que multiplicarlos por $\lambda_1 10^4$

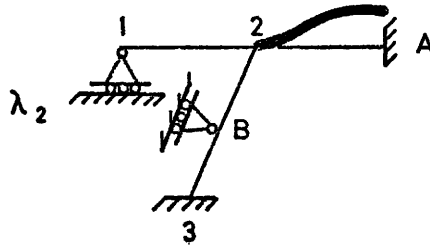


Fig. E 22.1g

El estado (1") queda reducido al de la figura E22.1g.

Los momentos de empotramiento en este caso son:

$$\hat{M}_{2A} = \hat{M}_{A2} = -\frac{6EI}{L^2} = -\frac{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1/12 \cdot 3 \cdot 2^3}{10^2} = -24 \cdot 10^4 \text{ mt}$$

El cálculo de Cross de este estado se realiza en la tabla E22.1c y en la figura E22.1h se representan los momentos en extremos de barra.

Tabla E22.1c. Cross del estado (1'')

NUDO	2			B	
BARRA	2-1	2 A	2 B	B 2	B 3
γ		0,5	0,5	0,5	0,5
R	$1,2 \cdot 10^6$	$1,6 \cdot 10^6$	$0,4 \cdot 10^6$	$0,4 \cdot 10^6$	$0,4 \cdot 10^6$
K	0,375	0,50	0,125	0,500	0,500
\hat{M}	0,000	-24,000	0,000	0,000	0,000
M^I	9,000	12,000	3,000	0,000	0,000
M^{II}				1,500	0,000
M^{III}				-0,750	-0,750
Σ	9,000	-12,000	3,000	0,750	-0,750

$$M_{3B} = -0,375$$

$$M_{42} = -24 + \frac{1}{2} (-12 + 24) = -18$$

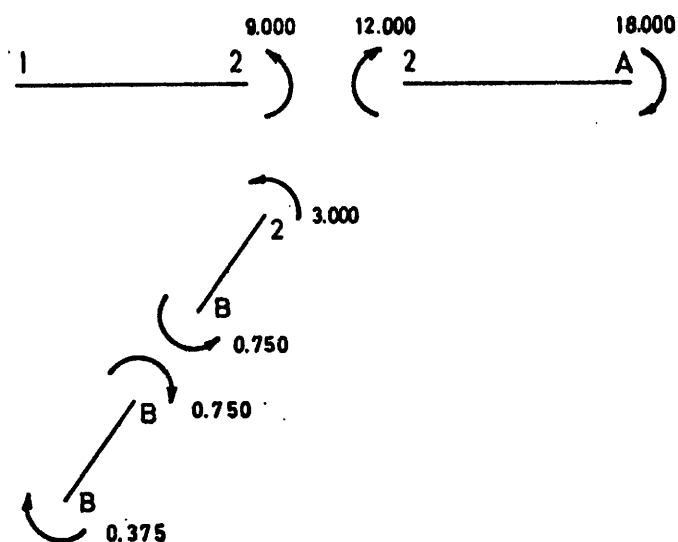


Fig. E22.1h.- Los momentos hay que multiplicarlos por $\lambda_2 10^6$

Los esfuerzos totales cuando la carga está en 1-2 son (ver figura E22.1i):

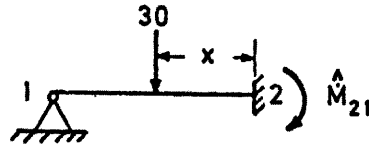


Fig. E22.1i

$$\hat{M}_{21} = -\frac{30x}{2} \left\{ 2 - \frac{x}{10} \left(3 - \frac{x}{10} \right) \right\}$$

$$M_{21} = -15x \left\{ 2 - \frac{x}{10} \left(3 - \frac{x}{10} \right) \right\} \left(1 - \frac{38,085}{100} \right) - 4,5 \cdot 10^4 \lambda_1 + \\ + 9 \cdot 10^4 \lambda_2$$

$$M_{2B} = 15 \left\{ 2 - \frac{x}{10} \left(3 - \frac{x}{10} \right) \right\} \frac{11,135}{100} + 10,5 \cdot 10^4 \lambda_1 + 3 \cdot 10^4 \lambda_2$$

$$M_{2A} = 15 \left\{ 2 - \frac{x}{10} \left(3 - \frac{x}{10} \right) \right\} \frac{50,78}{100} - 6 \cdot 10^4 \lambda_1 - 12 \cdot 10^4 \lambda_2$$

$$M_{B2} = -M_{B3} = +15x \left\{ 2 - \frac{x}{10} \left(3 - \frac{x}{10} \right) \right\} \frac{3,125}{100} + 11,625 \cdot 10^4 \lambda_1 + \\ + 0,75 \cdot 10^4 \lambda_2$$

$$M_{3B} = -\frac{1}{2} 15 \left\{ 2 - \frac{x}{10} \left(3 - \frac{x}{10} \right) \right\} \frac{3,125}{100} - 11,813 \cdot 10^4 \lambda_1 - \\ - 0,375 \cdot 10^4 \lambda_2$$

Cuando la carga está en el vano 2-A se tiene (ver figura E22.1j):

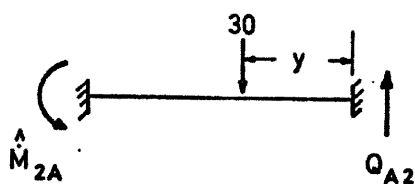


Fig. E 22.1j

$$\hat{M}_{2A} = \frac{30}{100} y^2 (10-y); \quad \hat{M}_{A2} = -\frac{30}{100} y (10-y)^2$$

$$Q_{A2} = \frac{30}{100} y^2 \left(3 - \frac{2y}{10}\right)$$

$$M_{21} = -0,3 y^2 (10-y) 38,085 \cdot 10^2 - 4,5 \cdot 10^4 \lambda_1 + 9 \cdot 10^4 \lambda_2$$

$$M_{2B} = -0,3 y^2 (10-y) 11,135 \cdot 10^{-2} + 10,5 \cdot 10^4 \lambda_1 + 3 \cdot 10^4 \lambda_2$$

$$M_{2A} = 0,3 y^2 (10-y) \left(1 - \frac{50,78}{100}\right) - 6 \cdot 10^4 \lambda_1 - 12 \cdot 10^4 \lambda_2$$

$$M_{B2} = -M_{B3} = -0,3 y^2 (10-y) 3,125 \cdot 10^{-2} + 11,625 \cdot 10^4 \lambda_1 + \\ + 0,75 \cdot 10^4 \lambda_2$$

$$M_{3B} = \frac{1}{2} 0,3 y^2 (10-y) 3,125 \cdot 10^{-2} - 11,813 \cdot 10^4 \lambda_1 - 0,375 \cdot 10^4 \lambda_2$$

$$M_{A2} = -0,3 y (10-y)^2 - \frac{1}{2} 50,78 \cdot 0,3 y^2 (10-y) 10^{-2} - 3 \cdot 10^4 \lambda_1 - \\ - 18 \cdot 10^4 \lambda_2$$

Planteando el equilibrio de los nudos B y A (figuras E22.1k y E22.1l) se tiene:

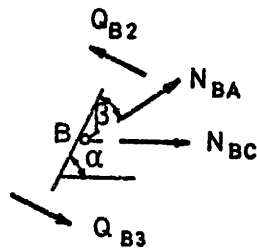


Fig.E22.1 k.- Equilibrio del nudo B

Equilibrio del nudo B :

$$N_{BC} \cdot \text{sen} \alpha + N_{BA} \text{sen} \beta + Q_{B3} - Q_{B2} = 0$$

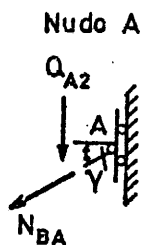


Fig.E22.1l.- Equilibrio del nudo A

Equilibrio del nudo A :

$$N_{BA} \cdot \text{sen} \gamma + Q_{A2} = 0$$

Sabiendo que:

$$\text{sen} \alpha = 0,8000 ; \quad \text{sen} \beta = 0,5882 ; \quad \text{sen} \gamma = 0,2941$$

y haciendo:

$$A = 15 \left\{ 2 - \frac{x}{10} \left(3 - \frac{x}{10} \right) \right\} 10^{-2}$$

$$K_1 = 10^4 \lambda_1 ; \quad K_2 = 10^4 \lambda_2 \quad (1)$$

El equilibrio del nudo B queda, si la carga está en 1-2:

$$\begin{aligned} & 0,8^2 \cdot 10^{-4} K_1 \cdot 4 \cdot 10^5 + 0,5882(0,5882 \cdot 10^{-4} K_1 \cdot 4 \cdot 10^5 + \\ & + 0,2941 \cdot 10^{-4} K_2 \cdot 4 \cdot 10^5) + \{-\frac{1}{5}(-3,125 A - 11,625 K_1 - 0,75 K_2 - \\ & - \frac{1}{2} 3,125 A - 11,813 K_1 - 0,375 K_2)\} - \{-\frac{1}{5}(3,125 A + 11,625 K_1 + \\ & + 0,75 K_2 + 11,135 A + 10,5 K_1 + 3 K_2)\} = 0 \end{aligned}$$

$$3,7895 A + 48,5518 K_1 + 7,8946 K_2 = 0 \quad (2)$$

y en el nudo A el equilibrio, cuando la carga está en 1-2, con
duce a:

$$\begin{aligned} & 0,2941(0,5882 \cdot 40 K_1 + 0,2941 \cdot 40 K_2) + \{-\frac{1}{10}(\frac{1}{2} 50,78 A - \\ & - 3 K_1 - 18 K_2 + 50,78 A - 6 K_1 - 12 K_2)\} = 0 \end{aligned}$$

$$-7,617 A + 7,8196 K_1 + 6,4598 K_2 = 0 \quad (3)$$

de (1), (2) y (3), se deduce:

$$\begin{aligned} K_1 &= -0,3358944 A ; \quad \lambda_1 = -0,33589 \cdot 10^{-4} A \\ K_2 &= -1,5857395 A ; \quad \lambda_2 = 1,58574 \cdot 10^{-4} A \end{aligned}$$

$$N_{BC} = \Delta_{BC} \frac{E\Omega}{L} = -0,8 \cdot 0,33589 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot 4 \cdot 10^5$$

$$N_{BC} = -10,7486 \cdot \text{A} \quad \text{Para el vano 1-2}$$

Cuando la carga está en el vano 2-A, si se considera $B = 0,3 y^2(10-y) \cdot 10^{-2}$, se tiene que el equilibrio en el nudo B conduce a:

$$\begin{aligned} & 25,6 K_1 + 0,5882 (0,5882 \cdot 40 K_1 + 0,2941 \cdot 40 K_2) + \\ & + \left\{ -\frac{1}{5}(3,125 B - 11,625 K_1 - 0,75 K_2 + \frac{1}{2} 3,125 B - 11,813 K_1 - \right. \\ & - 0,375 K_2) \} - \left\{ -\frac{1}{5}(-3,125 B + 11,625 K_1 + 0,75 K_2 - 11,135 B + \right. \\ & + 10,5 K_1 + 3 K_2) \} = 0 \\ & -3,7895 B + 48,5518 K_1 + 7,8946 K_2 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

y del equilibrio en el nudo A resulta:

$$\begin{aligned} & 0,2941 (0,5882 \cdot 40 K_1 + 0,2941 \cdot 40 K_2) + \left\{ -\frac{1}{10}(-0,3 y(10-y)^2 - \right. \\ & -\frac{1}{2} 50,78 B - 3 K_1 - 18 K_2 + B(100 - 50,78) - 6 K_1 - 12 K_2) + \\ & + 3(10-y) \} = 0 \end{aligned}$$

y haciendo:

$$C = 3 y (10-y)^2 \cdot 10^{-2} + 3(10-y) \text{ se tiene:}$$

$$C - 2,383 B + 7,8196 K_1 + 6,4598 K_2 = 0 \quad (5)$$

A partir de (1), (4) y (5), se deduce:

$$K_1 = 0,0224951 B + 0,0313398 C; \quad \lambda_1 = 0,0225 \cdot 10^{-4} B + \\ + 0,0313 \cdot 10^{-4} C$$

$$N_{BC} = 0,8(0,0225 \cdot 10^{-4} B + 0,0313 \cdot 10^{-4} C) 4 \cdot 10^5$$

$$N_{BC} = 0,7198 B + 1,0029 C \quad \text{Para el vano 2-A}$$

En la tabla E22.1d se efectúa el cálculo del valor de N_{BC} para valores concretos. En la figura E22.1m se dibuja la línea de influencia del axil en BC.

Tabla E22.1d

x	A	N_{BC}	y	B	C	N_{BC}
0	0	0	0	0	30	30,09
5	0,5625	-6,05	5	0,375	18,75	19,07
10	0	0	10	0	0	0

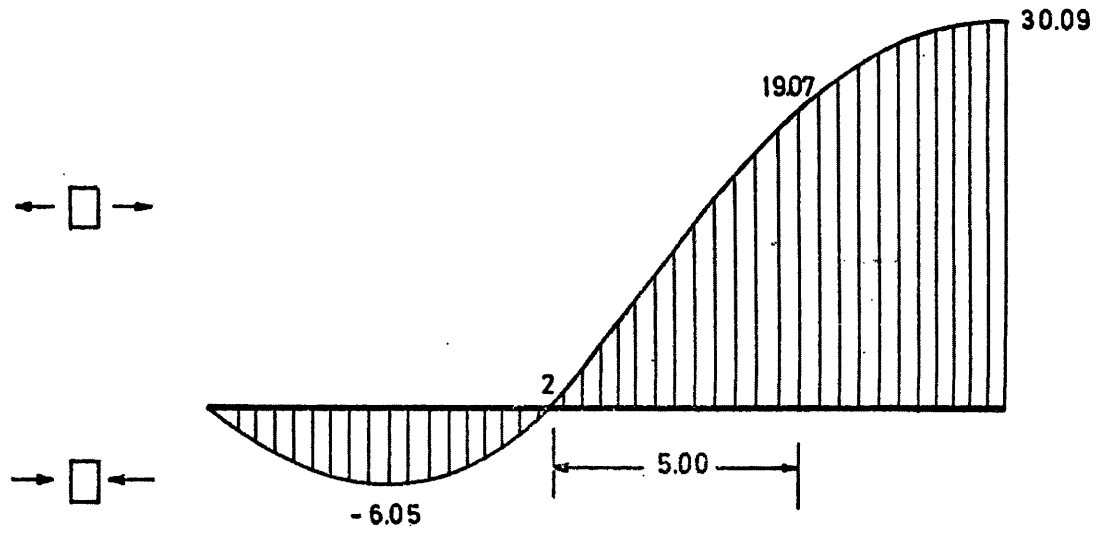


Fig. E22.1m.- Línea de influencia del esfuerzo axial en BC

Ejercicio E22.2.

En la estructura representada en la figura E22.2a, las barras 1-2 y 5-6 son de sección constante, con $EI = 10^6 \text{ tm}^2$ y se suponen inextensibles. Las barras de la estructura articulada 2-3-4-5 son de sección constante, con $L/E\Omega = 10^{-3} \text{ m/t}$.

SE PIDE:

- 1) Desplazamientos de todos los nudos.
- 2) Leyes de esfuerzos en todas las barras.

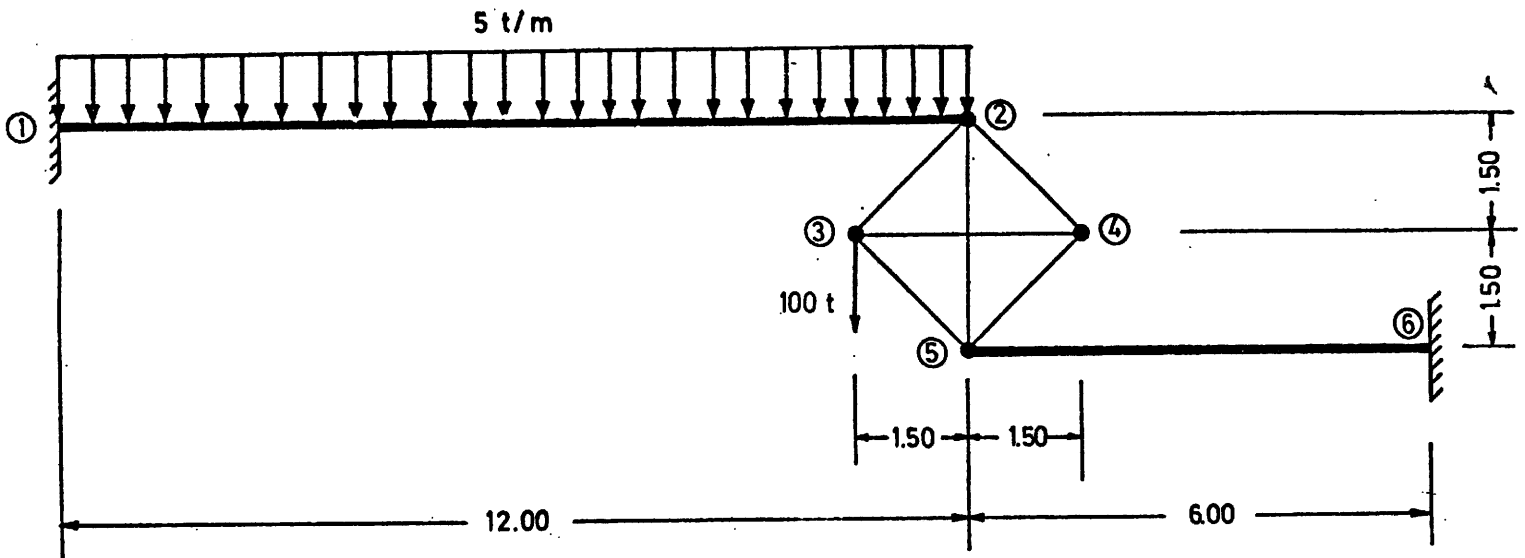


Fig. E22.2a

La elongabilidad equivalente de la subestructura articulada (figura E22.2b.) se obtiene como sigue:

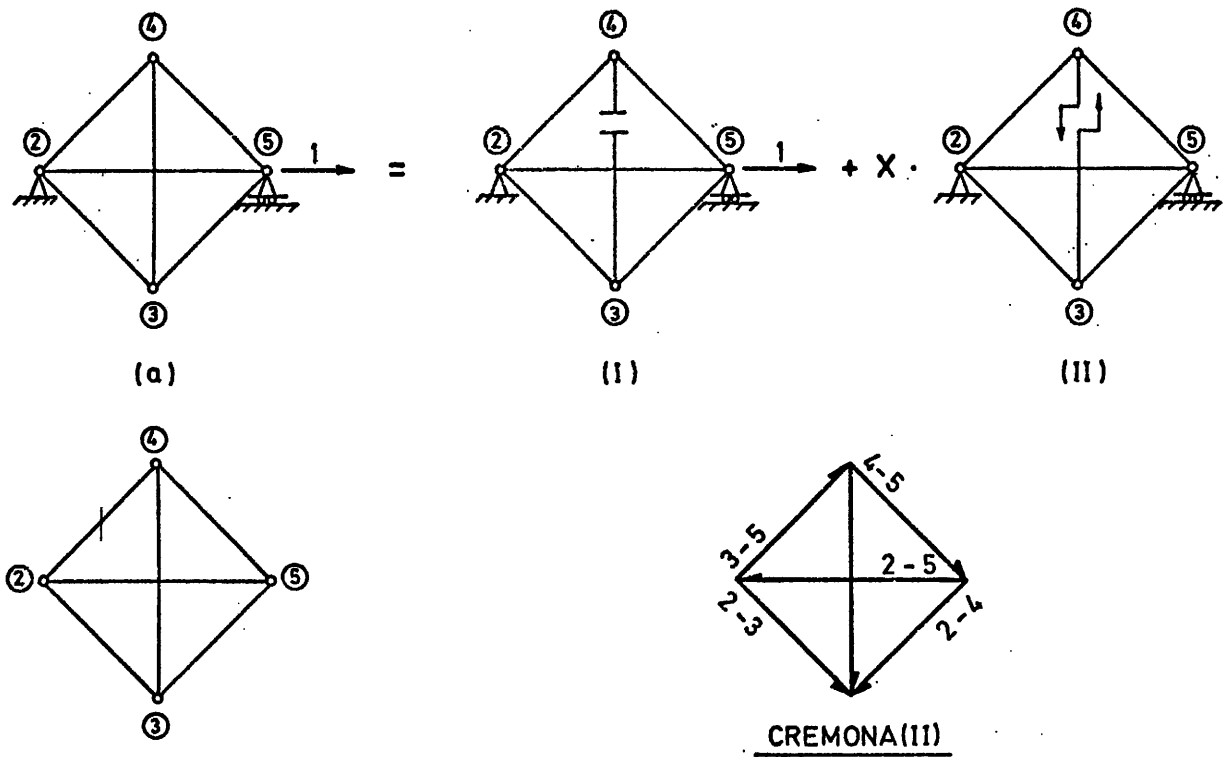


Fig. E22.2 b

Teniendo en cuenta la tabla E22.2a:

$$\sum_1^{NB} N^I N^{II} + X \sum_1^{NB} (N^{II})^2 = 0$$

$$1 + 4x = 0; \quad x = -\frac{1}{4}; \quad U_5 = \left(\frac{1}{E\Omega}\right)_{eq} = \sum_1^{NB} \delta_R N^I$$

$$\left(\frac{1}{E\Omega}\right)_{eq} = (1+X) \frac{1}{E\Omega} 1 = \frac{3}{4} 10^{-3}; \quad \left(\frac{L}{E\Omega}\right)_{eq} = 0,75 \cdot 10^{-3}$$

La obtención de las reacciones de la celosía biarticulada se lleva a cabo en la figura E22.2c:

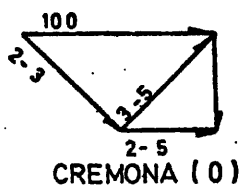
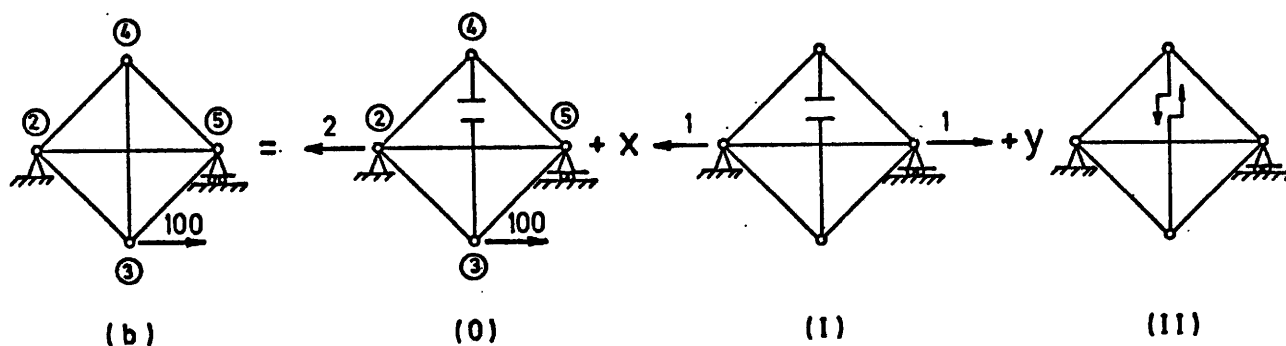


Fig. E22.2 c

$$\left. \begin{aligned} \sum_{1}^{NB} N^{\circ} N^I + X \sum (N^I)^2 + Y \sum N^I N^{II} &= 0; \quad 50 + X + Y = 0 \\ \sum_{1}^{NB} N^{\circ} N^{II} + X \sum N^I N^{II} + Y \sum (N^{II})^2 &= 0; \quad 50 + X + 4Y = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Y &= 0 \\ X &= -50 \end{aligned}$$

Las reacciones son pues: (figura E22.2d.)

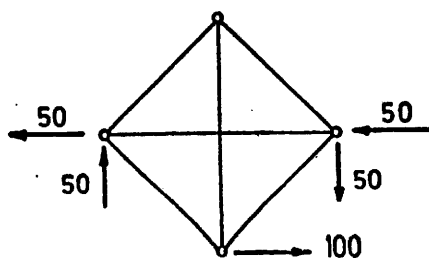
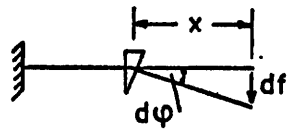
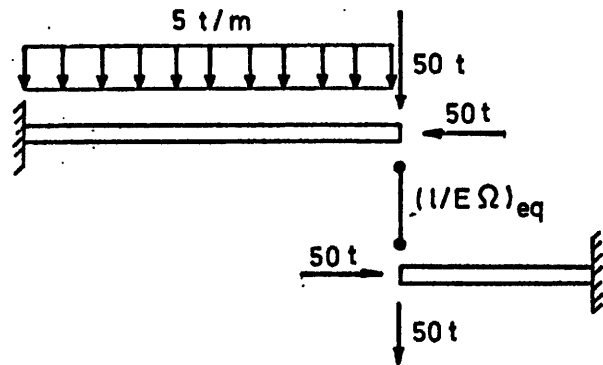


Fig. E22.2 d

Tabla E22.a.

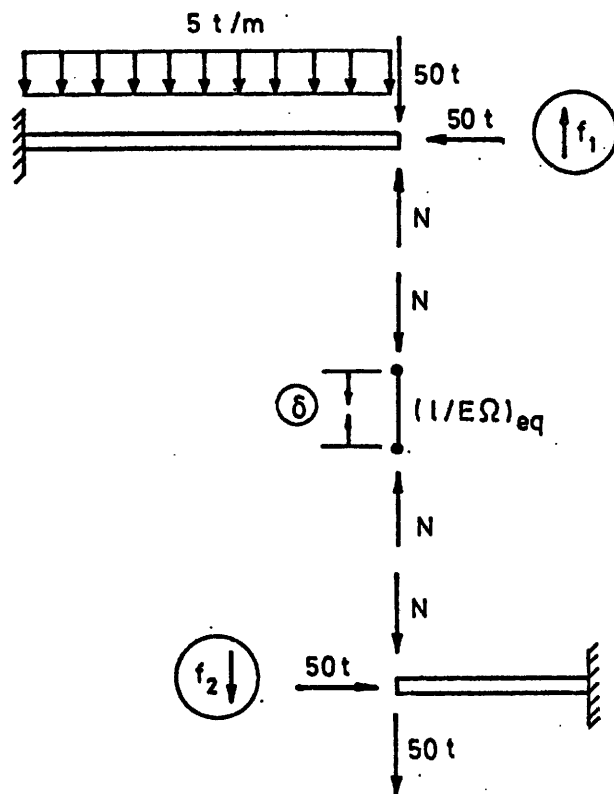
BARRA	N^I	N^{II}	$N^I N^{II}$	$(N^{II})^2$	N^0	$N^0 N^{II}$	$N^{(a)}$	$N^{(b)}$	$-27,296N^{(a)}$	$N^F = N^{(b)} - 27,296N^{(a)}$
2-3	0	-0,707	0	0,5	70,71	-50	0,1768	70,71	-4,83	65,88
2-4	0	-0,707	0	0,5	0	0	0,1768	0	-4,83	-4,83
2-5	1	1	1	1	50	50	0,75	0	-20,47	-20,47
3-4	0	1	0	1	0	0	-0,25	0	6,82	6,82
3-5	0	-0,707	0	0,5	-70,71	50	0,1768	-70,71	-4,83	-75,54
4-5	0	-0,707	0	0,5	0	0	0,1768	0	-4,83	-4,83
Σ			1	4		50				



$$df_2 = \frac{1}{EI} (N+50) x^2 dx; \quad f_2 = 10^{-6} \int_0^6 (N+50) x^2 dx$$

$$f_2 = 10^{-6} (N+50) \frac{6^3}{3} = 72 (N+50) \cdot 10^{-6}$$

$$f_2 = 10^{-6} (72N + 3600)$$



$$df_1 = \frac{1}{EI} \left\{ (N-50)x - 5 \frac{x^2}{2} \right\} x dx$$

$$f_1 = 10^{-6} \left\{ \int_0^{12} (N-50) x^2 dx - \frac{5}{2} \int_0^{12} x^3 dx \right\}$$

$$f_1 = 10^{-6} \left\{ (N-50) \frac{12^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot \frac{12^4}{4} \right\}$$

$$f_1 = 10^{-6} \{ 576N - 41760 \}$$

$$\delta = N \left(\frac{1}{E\Omega} \right)_{eq} = 10^3 \cdot 0,75N$$

$$\delta = 10^{-3} \cdot 0,75N$$

Fig. E 22. 2 e

Se ha de cumplir:

$$f_1 + f_2 = -\delta + 10^{-6}\{648N - 38160\} = -10^{-3} \cdot 0,75N$$

$$648N - 38160 = -750N; \quad 38160 = 1398N$$

$$N = 27,296 \text{ t}$$

Por lo tanto:

$$f_1 = -2,604 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$f_2 = 0,556 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\delta = 2,048 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

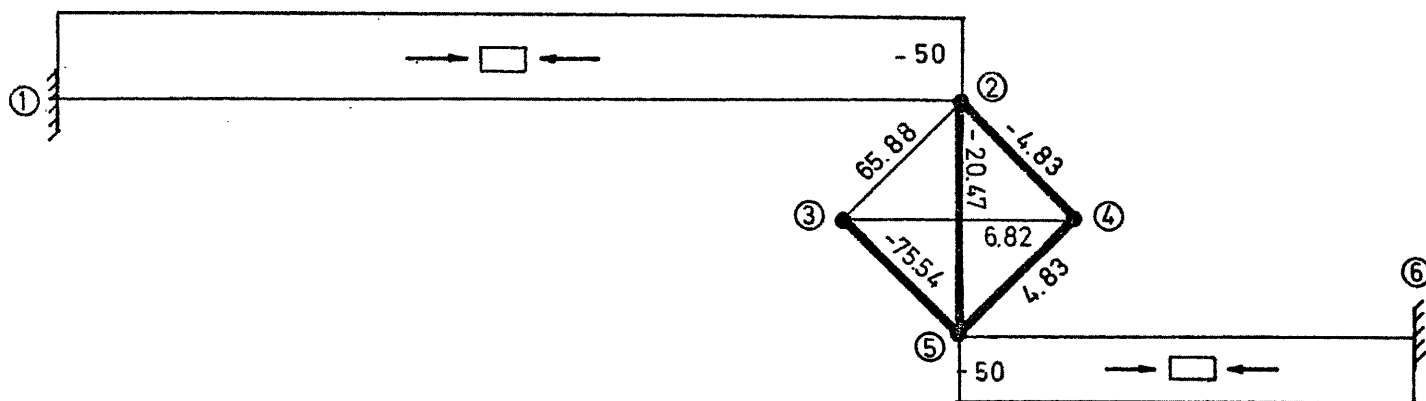
Los esfuerzos finales en la celosía son:

$$N^F = N^{(b)} - N \cdot N^{(a)}. \text{ Los } \Delta^R \text{ son } N^F \cdot 10^{-3} \text{ metros.}$$

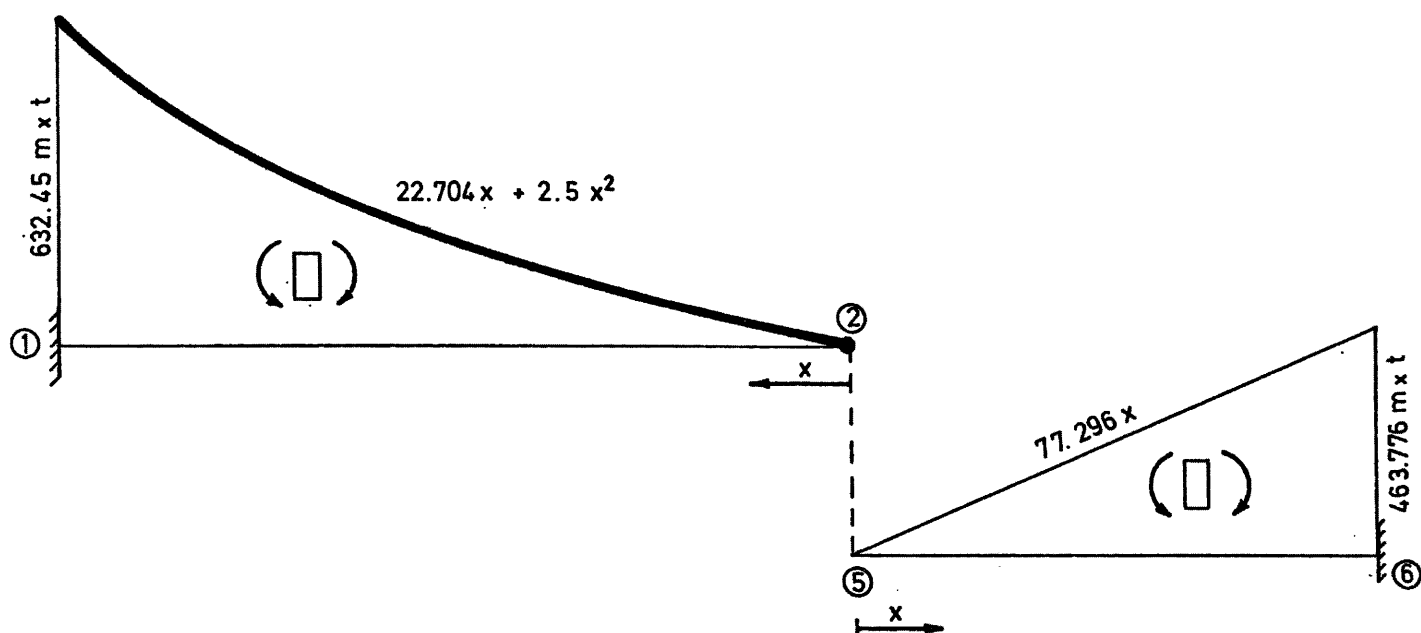
Para obtener los desplazamientos de todos los nudos de la celosía, se parte del nudo 2 fijo y dirección fija 2-5. A los desplazamientos obtenidos habrá que sumarles un desplazamiento vertical igual al descenso del nudo 2, es decir, 2,604 cm. (nudo 1 fijo).

Las leyes de esfuerzos axiales, cortantes y momentos flectores se indican en la figura E22.2f.

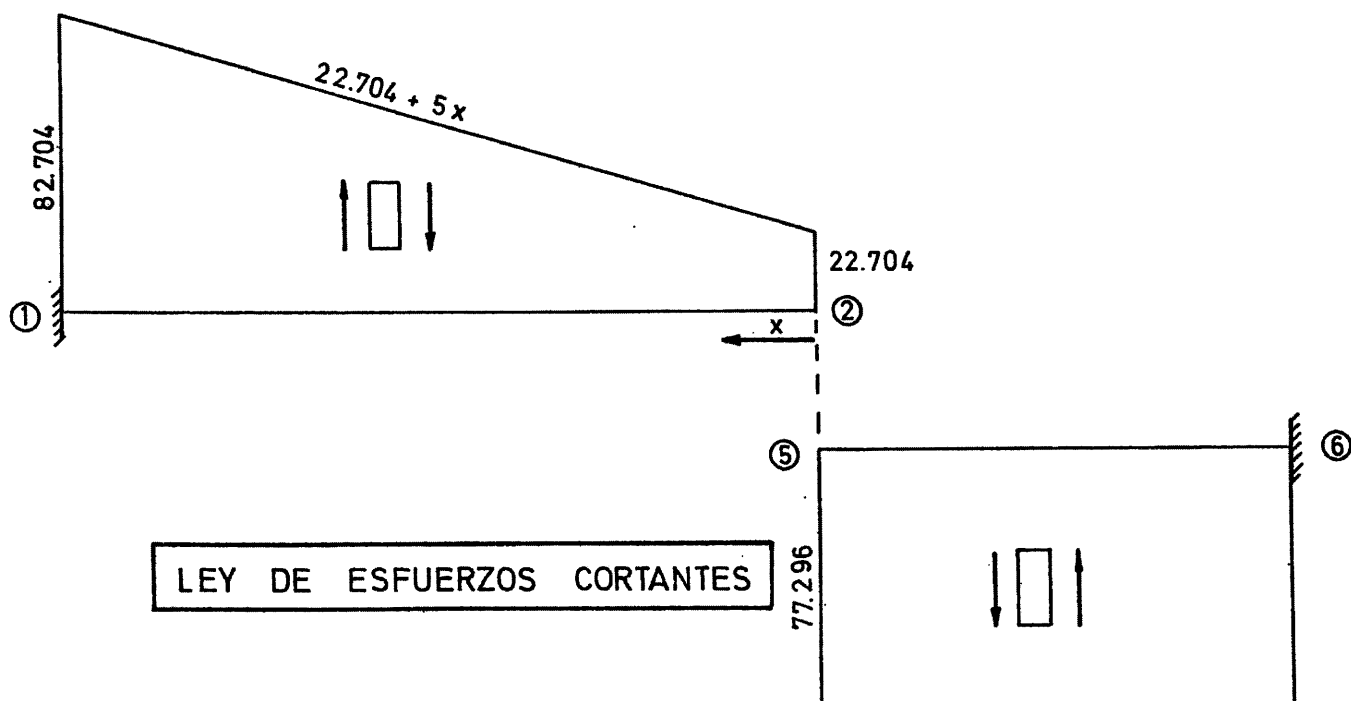
Los movimientos de los nudos de la celosía se indican en la figura E22.2g.



LEY DE ESFUERZOS AXILES

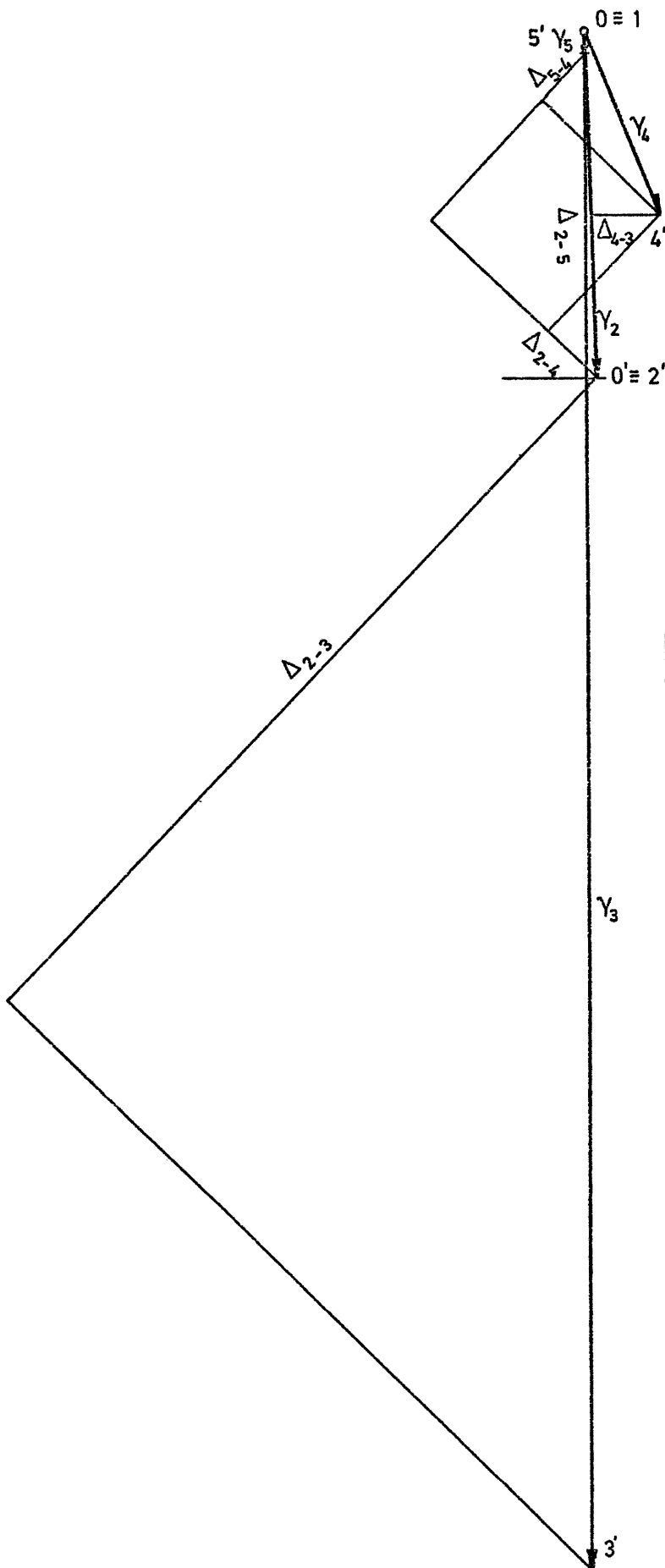


LEY DE MOMENTOS FLECTORES



LEY DE ESFUERZOS CORTANTES

Fig. E22.2 f



$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 0 \\ \gamma_2 &= 26.04 \cdot 10^{-3} \text{ m.} = 2.6 \text{ cm.} \\ \gamma_3 &= 117 \cdot 10^{-3} \text{ m.} = 11.7 \text{ cm.} \\ \gamma_4 &= 15 \cdot 10^{-3} \text{ m.} = 1.5 \text{ cm.} \\ \gamma_5 &= 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m.} = 1.5 \text{ m.m.} \\ \gamma_6 &= 0\end{aligned}$$

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NUDOS

Fig. E 22. 2 g

Ejercicio E22.3.

La cubierta de la figura E22.3a está constituida - por una estructura entramado de hormigón (sus nudos se designan por letras) y por otra en celosía metálica (con sus nudos numerados), que se encuentra articulada a la anterior.

Las acciones consideradas en el cálculo estructural han sido:

1) Pretensado sobre la barra A-A', que puede modelarse como una ley de esfuerzos internos (momentos flectores) constante en toda su longitud y de valor 200 m.t por metro de luz y dos fuerzas horizontales en sus extremos de valor --
 $H = 100 \text{ t.}$

2) Existe, además, una sobrecarga importante, que, en primera aproximación, se supone es una fuerza vertical descendente de 100 toneladas actuando en el nudo 7.

3) En el montaje de la estructura de celosía, se observó un error en la longitud de la barra 6-8 de 10 cm por defecto.

SE PIDE:

1) Esfuerzos en la sección central de la viga A-A'.

2) Deformada del cordón inferior de la celosía metálica.

Estructura de hormigón:

- Módulo de elasticidad: $300.000 \text{ kg. cm}^{-2}$.
- Secciones: Barra A-A' $2,00 \cdot 0,70 \text{ m}^2$.
Restantes barras $1,00 \cdot 0,70 \text{ m}^2$.

Estructura metálica:

- Módulo de elasticidad: $2.000.000 \text{ kg. cm}^{-2}$.
- Sección en todas las barras 150 cm^2 .

NOTA:

No se considera la deformación por axil en las barras de hormigón.

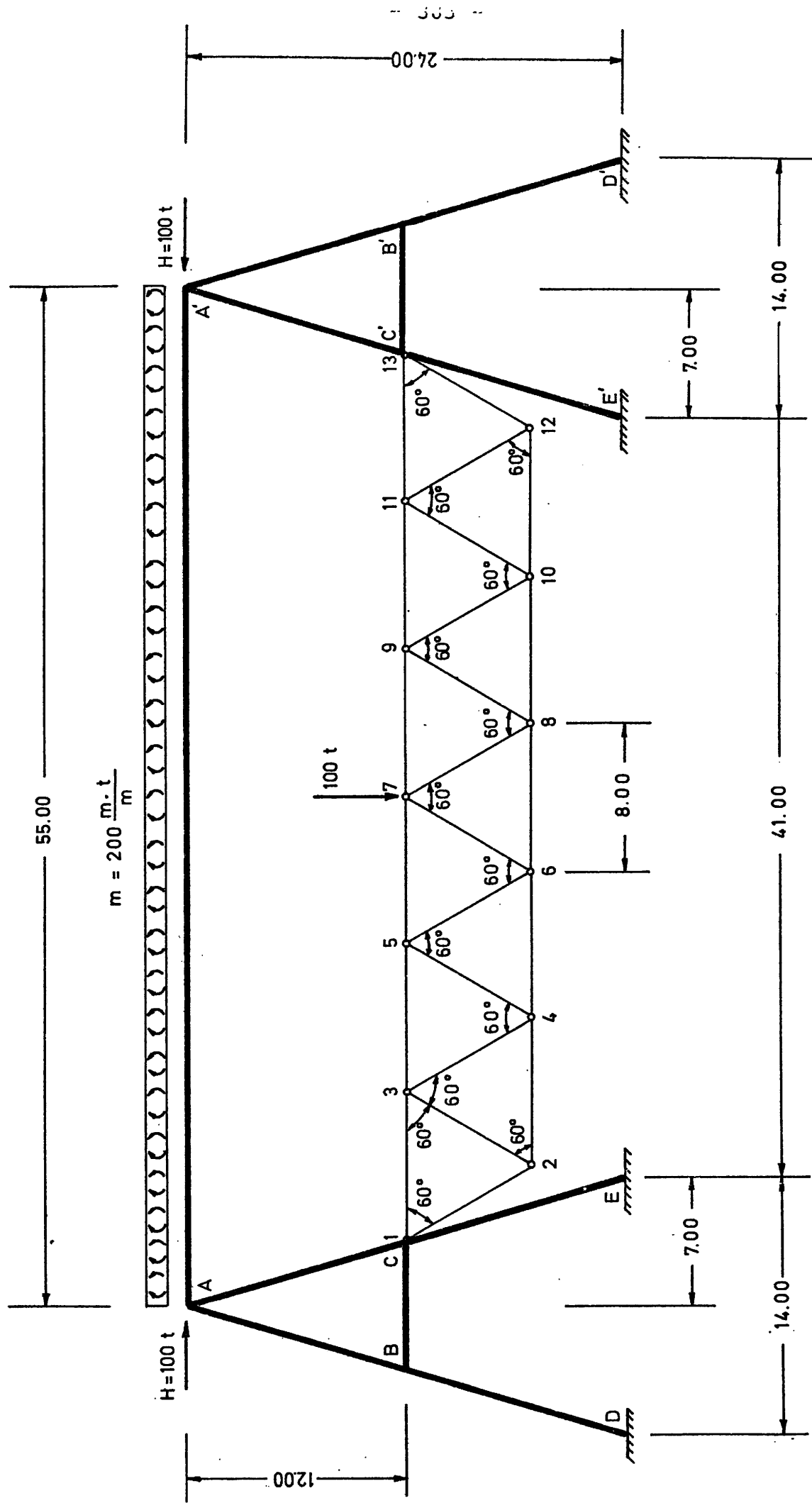


Fig. E 22. 3 a

La estructura es simétrica y está sometida a carga simétrica. Por lo tanto, el único estado paramétrico posible es el de la figura E22.3b:

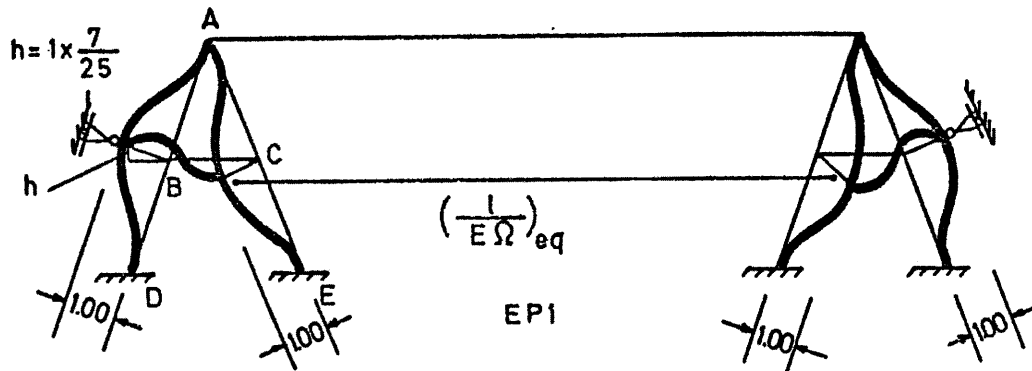
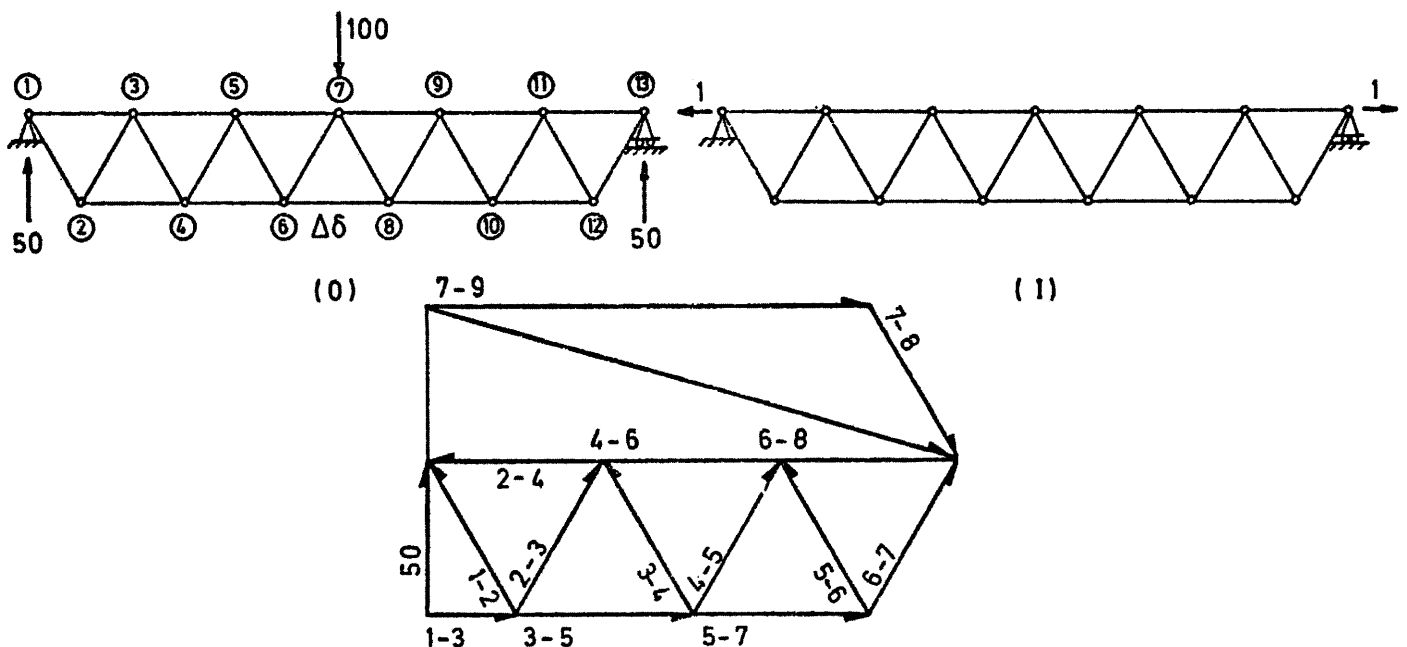


Fig. E22.3 b

La celosía puede ser sustituida por un tirante con una elongabilidad equivalente, pues no hay descenso relativo entre los nudos 1 y 13.

Estudio de la celosía:

Reacciones de la biarticulada: (figura E22.3c.)



CREMONA (0)

Fig. E22.3 c

$$\Sigma \{ (N^0 + X \cdot N^I) \frac{1}{E\Omega} + \Delta\delta \} N^I = 0 ;$$

$$\Sigma (N^0 \frac{1}{E\Omega} + \Delta\delta) N^I + X \Sigma (N^I)^2 \frac{1}{E\Omega} = 0$$

Como en el estado (I) solamente trabajan las barras del cordón superior, se cumple (tabla E22.3a.):

$$\begin{array}{c} \Sigma \\ \text{barras} \\ \text{cordón} \\ \text{superior} \end{array} N^0 N^I + X \begin{array}{c} \Sigma \\ \text{barras} \\ \text{cordón} \\ \text{superior} \end{array} (N^I)^2 = 0 ;$$

$$-519,62 + 6 X = 0$$

$$X = 86,60$$

Elongabilidad equivalente:

$$\Sigma (N^I)^2 \frac{1}{E\Omega} = 6 \frac{8}{2 \cdot 10^3 \cdot 150} = \frac{48}{3} 10^{-5} = 16 \cdot 10^{-5}$$

$$\left(\frac{L}{E\Omega} \right)_{eq} = 16 \cdot 10^{-5} \text{ m/T}$$

Para todas las barras:

$$\left(\frac{L}{E\Omega} \right) = \frac{8}{2 \cdot 10^3 \cdot 150} = \frac{8}{3} 10^{-5} = 0,2667 \cdot 10^{-4} = 0,002667 \cdot 10^{-2}$$

Tabla E22.3a.

FACTOR COMUN								10^{-2}	10^{-2}	
BARRA	N^0	N^I	$N^0 N^I$	$(N^I)^2$	$N_a = N^0 + XN^I$	$-62,16N^I = N_b$	$N^{TOTAL} = N_a + N_b$	$N^I 1/E\Omega$	$\Delta\delta$	$\delta R(\text{cm})$
1-2	57,74	0	0	0	57,74	0	57,74	0,154	0	0,154
1-3	-28,87	1	-28,87	1	57,74	-62,92	-5,18	-0,014	0	-0,014
2-3	-57,74	0	0	0	-57,74	0	-57,74	-0,154	0	-0,154
2-4	57,74	0	0	0	57,74	0	57,74	0,154	0	0,154
3-4	57,74	0	0	0	57,74	0	57,74	0,154	0	0,154
3-5	-86,60	1	-86,60	1	0	-62,92	-62,92	-0,168	0	-0,168
4-5	-57,74	0	0	0	-57,74	0	-57,74	-0,154	0	-0,154
4-6	115,47	0	0	0	115,47	0	115,47	0,308	0	0,308
5-6	57,74	0	0	0	57,74	0	57,74	0,154	0	0,154
5-7	-144,34	1	-144,34	1	-57,74	-62,92	-120,66	-0,322	0	-0,322
6-7	-57,74	0	0	0	-57,74	0	-57,74	-0,154	0	-0,154
Σ PARCIAL			-259,81	3					0	0
6-8	173,21	0	0	0	173,21	0	173,21	0,462	-10	-9,538

Σ TOTAL			-519,62	6						

El estado intraslacional es el de la figura E22.3d.

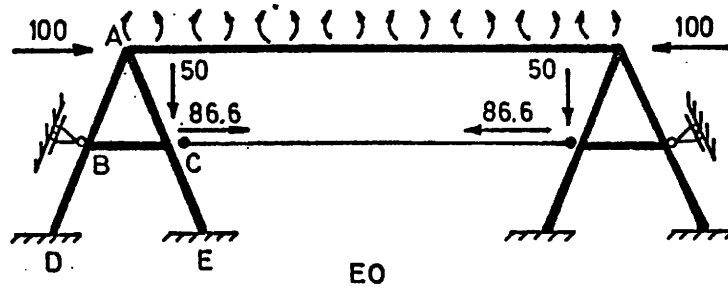


Fig. E 22.3 d

A efectos de flexión, los estados E0 y EP1 son si métricos, por lo que su estudio queda reducido al estudio - de la mitad (figura E22.3e.):

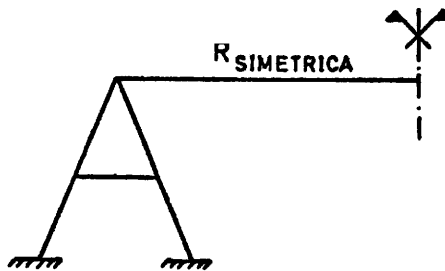
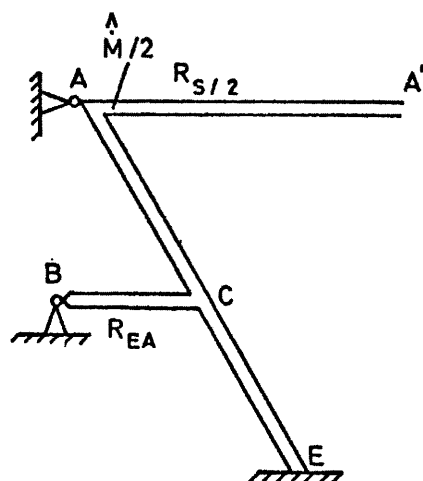


Fig. E 22.3 e

Pero, a su vez, esta estructura mitad es, a efectos de flexión, en ambos estados, antimétrica, por lo que, finalmente, el estudio tanto del estado E0, como del estado EP1, se reduce a la figura E22.3f.



Barra A - A'

$$I' = \frac{1}{12} 0,7 \times 2^3 = 8 \times \frac{1}{12} \times 0,7 = 81$$

Restantes barras

$$I = \frac{1}{12} \times 0,7 \times 1^3$$

Fig. E 22.3 f

Las características elastomecánicas de las barras son:

$$A-A': R_{AA'} = \frac{4EI'}{35} = \frac{32}{55} EI \approx \frac{32}{55} = 0,582; R_S^{AA'} = R(1-\gamma) \approx \underline{\underline{0,291}}$$

$$A-C: \underline{\underline{R_{AC} = R_{CA} = \frac{4EI}{12,5} \approx \frac{4}{12,5} = 0,32}} = \underline{\underline{R_{CE} = R_{CE}}}; \underline{\underline{\gamma_{AC} = \gamma_{CA} = 0,5}}$$

$$CB: \underline{\underline{R_{CB}^{EA} = \frac{3EI}{3,5} \approx \frac{3}{3,5} = 0,857}}}$$

Los momentos de empotramiento rígido son:

$\hat{M}_{AA'}^o = -200$: El análisis del Cross se hará con -100 por la antimetría.

$$\begin{aligned} \hat{M}_{AC}^I = \hat{M}_{CA}^I = -\hat{M}_{CE}^I = -\hat{M}_{EC}^I &= \frac{6EI}{12,5^2} \cdot 1 = \frac{6}{12,5^2} \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,7 = \\ &= \frac{2,1}{2 \cdot 12,5^2} \cdot 10^6 = \underline{\underline{6720}} \end{aligned}$$

$$\hat{M}_{CB}^I = \hat{M}_{BC}^I = \frac{6EI}{7^2} \cdot \frac{14}{25} = \frac{12}{7 \cdot 25} \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,7 = \frac{3}{25} \cdot 10^5 = \underline{\underline{12000}}$$

Los Cross se realizan en las tablas E22.3b y E22.3c:

Tabla E22.3b

	ESTADO EO				
NUDO	A		C		
BARRA	A-A'	A-C	C-A	C-B	CE
R	0,145	0,32	0,32	0,857	0,32
K	0,312	0,688	0,214	0,572	0,214
M	-100	0	0	0	0
R ^I	31,2	68,8	0	0	0
T ^I	0	0	34,4	0	0
R ^{II}	0	0	-7,36	-19,68	-7,36
Σ	-68,8	68,8	27,04	-19,68	-7,36

$$\underline{\underline{M_{EC}^0}} = - \frac{7,36}{2} = \underline{\underline{-3,68}}$$

$$Q_{AA'}^0 = 0; \quad M_{AA'}^0 = -2 \cdot 68,8 = -137,6;$$

$$Q_{CE}^0 = - \frac{-7,36 - 3,68}{12,5} = 0,8832$$

Tabla E22.3c.

NUDO	ESTADO EP1				
	A		C		
BARRA	A-A'	A-C	C-A	C-B	C-E
R	0,145	0,32	0,32	0,857	0,32
K	0,312	0,688	0,214	0,572	0,214
\hat{M}	0	6720	6720	12000	-6720
R^I	-2096,6	-4623,4	-2568	-6864	-2568
T^I	0	-1284	-2311,7	0	0
R^{II}	400,6	883,4	494,7	1322,3	494,7
Σ	-1696	1696	2335	6458,3	-8793,3

$$\underline{\underline{M_{EC}^I}} = (-8793,3 + 6720)0,5 - 6720 = -7756,65$$

$$Q_{AA'}^I = 0; \quad M_{AA'}^I = -2 \cdot 1696 = -3392$$

$$Q_{CE}^I = - \frac{-8793,3 - 7756,65}{12,5} = 1324$$

El alargamiento final del tirante es:

$$2 \cdot \lambda \frac{24}{25} = 1,92\lambda$$

Por lo tanto:

$$1,92\lambda = T\left(\frac{1}{E\Omega}\right)_{eq} = 16 \cdot 10^{-5} T \rightarrow T = \frac{1,92}{16} 10^5 \lambda = 0,12 \cdot 10^5 \lambda$$

$$T = 12000\lambda$$

Ecuación de equilibrio (figura E22.3g.):

Obligando a que el momento resultante en A sea nulo, se tiene:

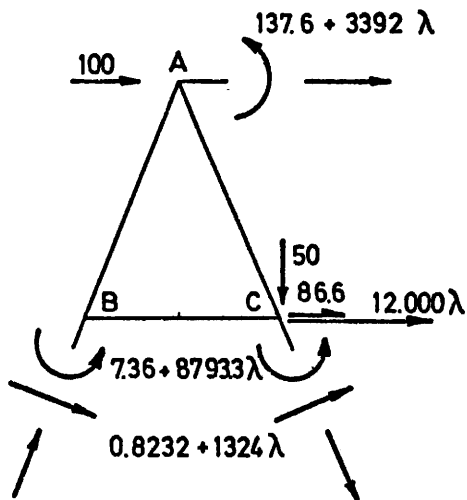


Fig. E22. 3g

$$(137,6+3392\lambda)+2(7,36+8793,3\lambda) + \\ + 2(0,8832+1324\lambda)12,5+12000\lambda \cdot 12+ \\ + 86,6 \cdot 12 - 50 \cdot 3,5 = 0$$

O sea:

$$1038,6+198078,6\lambda = 0; \quad \lambda = -0,00524$$

$$T = -62,92 \text{ ton.}$$

Esfuerzos en la sección central de la viga A-A':

En cuanto al flector y cortante no hay dificultades de obtención.

Cálculo del axil:

El esfuerzo axial en la barra BC es nulo en los estados (0) y (1) por antimetría, en lo que respecta a la flexión.

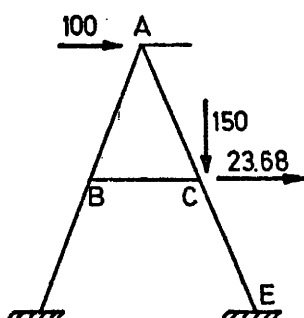


Fig. E22.3h

Debido a las fuerzas (ver figura - E22.3h.), también es nulo, pues, de lo contrario, el nudo B no estaría en equilibrio.

La componente en la dirección ACE de las fuerzas de 50 y 23,68 toneladas proporciona el valor que sigue:

$$F = \frac{50 \cdot 24 + 23,68 \cdot 7}{25} = 54,63 \text{ ton.} \rightarrow$$

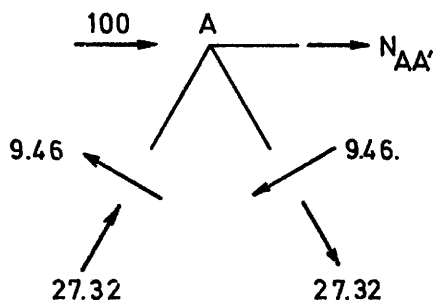


Fig. E22.3i

$$\rightarrow N_{AC} = -N_{CE} = \frac{54,63}{2} = 27,32$$

Por el equilibrio de fuerzas horizontales en el nudo A resulta (figura E22.3i.):

$$N_{AA'} + 100 + 2 \cdot 27,32 \frac{7}{25} - 2 \cdot 9,46 \frac{24}{25} = 0 ;$$

$$\underline{\underline{N_{AA'} = -97,14 \text{ ton.}}}$$

$$M_{AA'} = -137,6 - 3392\lambda - 200 = -319,8 \text{ mxt.}$$

ESFUERZOS EN LA SECCION CENTRAL DE LA VIGA A-A' (Figura E22.3j.):

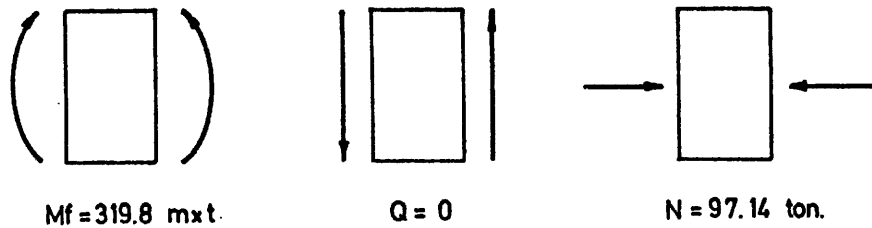
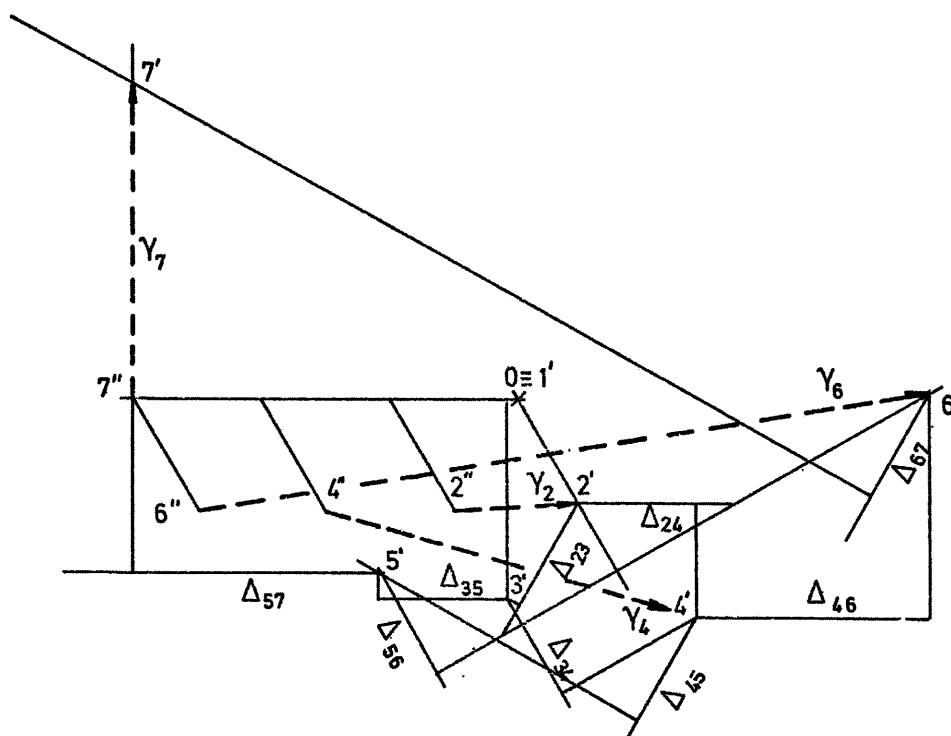


Fig. E22.3j

Deformada del cordón inferior de la celosía

El movimiento final del nudo 1 es conocido, por lo que se hallará la deformada pedida considerando dicho nudo - fijo. Se parte de la dirección fija 1-2 imponiendo finalmente la condición de que el nudo 7 tenga solamente desplazamiento vertical, por simetría. (Ver figura E22.3k.).



WILLIOT

$$|\vec{\gamma}_2| = |\vec{\gamma}_{12}| = 1.6 \text{ m.m.}$$

$$|\vec{\gamma}_4| = |\vec{\gamma}_{10}| = 5 \text{ m.m.}$$

$$|\vec{\gamma}_6| = |\vec{\gamma}_8| = 9.7 \text{ m.m.}$$

NOTA : Los desplazamientos de los nudos 8, 10 y 12 son simétricos de los desplazamientos γ_6 , γ_4 y γ_2 respectivamente.

Fig. E22.3 k

CALCULO CONVENCIONAL DE ESTRUCTURAS

INDICE

	<u>Pag.</u>
A. Estructuras articuladas.	
1. Clasificación de estructuras articuladas.	
2. Estructuras isostáticas. Cálculo de esfuerzos. (Ejercicio E2.1.)	7
3. Estructuras isostáticas. Cálculo de movimientos. (Ejercicio E3.1.)	48
4. Teoremas energéticos. Ecuaciones constitutivas.	
5. Estructuras isostáticas. Líneas de influencia. (Ejercicio E5.1.).....	65
6. Estructuras hiperestáticas. Cálculo de esfuerzos. (Ejercicio E6.1.).....	76
7. Estructuras hiperestáticas. Cálculo de movimientos. (Ejercicio E7.1.).....	92
8. Estructuras hiperestáticas. Líneas de influencia. (Ejercicio E8.1.)	126
9. Estructuras espaciales.	

- B, Estructuras reticuladas.

10. Hipótesis. Clasificación de estructuras reticuladas.
11. Características elasto-mecánicas de la barra.
(Ejercicio E11.1.) 145
12. Métodos iterativos de cálculo. Método de Cross.
Simplificaciones.
13. Estructuras intraslacionales. Cálculo de esfuerzos.
(Ejercicio E13.1.) 174
14. Estructuras intraslacionales. Cálculo de movimientos.
Acciones cinemáticas. (Ejercicio E14.1.) 186
15. Estructuras intraslacionales . Líneas de influencia.
(Ejercicio E15.1.) 201
16. Estructuras traslacionales. Planteamiento general.
Grado de traslacionalidad.
17. Estructuras traslacionales. Cálculo de esfuerzos.
(Ejercicio E17.1.) 226
18. Estructuras traslacionales. Cálculo de movimientos.
(Ejercicio E18.1.) 233

19. Estructuras traslacionales. Líneas de influencia.	
(Ejercicio E19.1.)	265
20. Estructuras con barras elongables.	
(Ejercicio E20.1.)	305
21. Estructuras no sustentadas. Apoyos elásticos.	
(Ejercicio E21.1.)	352
22. Problemas especiales.	
(Ejercicio E22.2.)	375

NOTACION EMPLEADA: (ver figura 0a)

FUERZAS (p P) Y MOMENTOS (g G):

$p \ p_x \ p_y \ p_z \ g_x \ g_y \ g_z$ acciones repartidas en ejes generales.

$\underline{p} \ \underline{p}_x \ \underline{p}_y \ \underline{p}_z \ \underline{G}_x \ \underline{G}_y \ \underline{G}_z$ acciones concentradas en ejes generales.

$p^* \ p_x^* \ p_y^* \ p_z^* \ g_x^* \ g_y^* \ g_z^*$ reacciones repartidas en ejes generales.

$\underline{p}^* \ \underline{p}_x^* \ \underline{p}_y^* \ \underline{p}_z^* \ \underline{G}_x^* \ \underline{G}_y^* \ \underline{G}_z^*$ reacciones concentradas en ejes generales.

$\bar{p} \ \bar{p}_x \ \bar{p}_y \ \bar{p}_z \ \bar{g}_x \ \bar{g}_y \ \bar{g}_z$ acciones repartidas en ejes locales.

$\underline{\bar{p}} \ \underline{\bar{p}}_x \ \underline{\bar{p}}_y \ \underline{\bar{p}}_z \ \underline{\bar{G}}_x \ \underline{\bar{G}}_y \ \underline{\bar{G}}_z$ acciones concentradas en ejes locales.

$\bar{p}^* \ \bar{p}_x^* \ \bar{p}_y^* \ \bar{p}_z^* \ \bar{g}_x^* \ \bar{g}_y^* \ \bar{g}_z^*$ reacciones repartidas en ejes locales.

$\underline{\bar{p}}^* \ \underline{\bar{p}}_x^* \ \underline{\bar{p}}_y^* \ \underline{\bar{p}}_z^* \ \underline{\bar{G}}_x^* \ \underline{\bar{G}}_y^* \ \underline{\bar{G}}_z^*$ reacciones concentradas en ejes locales.

P_{xi} acción concentrada sobre la barra i.

P_{xj}^* reacción concentrada sobre el nudo j.

PUBLICACIONES DEL DEPARTAMENTO DE ANALISIS DE LAS ESTRUCTURAS.
CATEDRA DE CALCULO DE ESTRUCTURAS.

- Cálculo convencional de estructuras. Problemas.

Avelino Samartín, J.R. González de Cangas, Luís Moreno y Javier Torres.

246 páginas (AE-79.1)

- Cálculo de estructuras elásticas geométricamente no lineales.

Avelino Samartín.

62 páginas (AE-79.2)

- La viga columna.

Avelino Samartín.

54 páginas (AE-79.3)

- Cálculo matricial de estructuras. Problemas.

Avelino Samartín, J.R. González de Cangas, Luís Moreno y Javier Torres.

226 páginas (AE-80.3)

- Un programa de generación automática de datos para el cálculo de emparrillados planos. (GEDE).

Fernando Martínez y Avelino Samartín.

135 páginas (AE-80.2)

- Teoría elemental de vigas alabeadas. Aplicación a la viga - balcón circular.

Avelino Samartín y J.R. González de Cangas.

36 páginas (AE-80.3)

- Una contribución al estudio de hiperelementos finitos en flexión de placas.

Julián Díaz del Valle y Avelino Samartín,
392 páginas (AE-80.4)

- Cálculo dinámico y teoría de placas. Problemas.

Avelino Samartín, J.R. González de Cangas, Luís Moreno y -
Javier Torres.

159 páginas (AE-80.5)

- Cálculo convencional de Estructuras. Problemas.

Avelino Samartín, J.R. González de Cangas, Luis Moreno y
Javier Torres

399 páginas (AE-80.6)